

## PROGRAMME DE COLLE

Numéro de semaine : 31

Semaine du 7/6/2021 au 12/6/2021

### Questions de cours :

1. Montrer que les matrices inversibles sont denses dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  pour toute norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
2. Inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace préhilbertien réel, cas d'égalité et application à l'inégalité de Minkowski.
3. Démontrer l'identité du parallélogramme. La norme  $\|\cdot\|_\infty$  est-elle euclidienne ?
4. Isomorphisme entre un espace euclidien et l'espace de ses formes linéaires (Théorème de représentation de Riesz). Expression de la base duale d'une BON, expression de l'antécédent d'une forme linéaire par l'isomorphisme de la question précédente.
5. Montrer que si  $F$  est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien,  $F^\perp$  est son supplémentaire orthogonal. Que peut-on en déduire quant à leurs dimensions ?
6. Mise en oeuvre du principe d'orthonormalisation de Schmidt : orthonormaliser la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  pour le produit scalaire  $(P|Q) = \int_0^1 P(u)Q(u)du$ .
7. Existence et caractérisation de  $d(x, F) = \inf\{\|x - z\| \mid z \in F\}$  où  $x$  est un vecteur de l'espace euclidien  $E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Expression explicite de cette distance si  $F$  est un hyperplan vectoriel
8. Distance d'un vecteur à un hyperplan affine avec dessin obligatoire.
9. Un endomorphisme préserve la norme si et seulement si il préserve le produit scalaire.
10. Montrer qu'un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$  est orthogonal ssi il envoie une BON sur une BON ssi il envoie toute BON de  $E$  sur une BON de  $E$ .
11. Énoncer et prouver les 5 assertions équivalentes permettant de définir les matrices orthogonales.
12. Montrer qu'un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$  est orthogonal ssi sa matrice dans toute BON de  $E$  est orthogonale ssi il existe au moins une BON de  $E$  dans laquelle sa matrice est orthogonale.

### Thème de la colle :

#### Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens.

1. Définitions préliminaires.
2. Espaces préhilbertiens et euclidiens.
3. Projection orthogonale. Symétrie orthogonale.
4. Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.

#### Isométries des espaces euclidiens.

1. Endomorphismes orthogonaux, Caractérisation. Groupe orthogonal et groupe spécial orthogonal.
2. Matrices orthogonales, caractérisations. Lien avec les changements de BON et les automorphismes orthogonaux.

Vincent Bayle

Je suis joignable

- par téléphone au 09-50-28-23-28 ou au 06-74-52-23-64,
- par courrier électronique à l'adresse [120bayle2@free.fr](mailto:120bayle2@free.fr),
- par courrier postal, à mon adresse personnelle : 2, Impasse des Bernaches, 31280-DREMIL LAFAGE.