# Nombres réels

## 1 Manipulation de la borne sup dans $\mathbb{R}$.

### 1.1 Calculs concrets de bornes supérieures ou inférieures

▷ **Exercice 1.1.**

1. Soit $A = \left\{ (-1)^n + \dfrac{1}{n} \middle| \in \mathbb{N}^* \right\}$. Étudier l'existence de $\inf A$, $\min A$, $\sup A$, $\max A$ et les calculer le cas échéant.
2. Calculer $\sup \left\{ 1 - \dfrac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}$ et $\inf \left\{ -2 + 3\dfrac{(-1)^n}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

▷ **Exercice 1.2.** Les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles majorées, minorées ? si oui, préciser lorsqu'elles existent leurs bornes supérieures, bornes inférieures, plus grand élément, plus petit élément...

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\},\ B = \left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\},\ C = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{p} \middle| \begin{array}{l} (n,p) \in \mathbb{N}^{*2} \\ n \leqslant p \end{array} \right\},\ D = \left\{ \frac{p+1}{n} \middle| \begin{array}{l} (n,p) \in \mathbb{N}^{*2} \\ p \geqslant n \end{array} \right\}.$$

▷ **Exercice 1.3. Utilité des caractérisations séquentielles.**
Soient $A = \left\{ x + \dfrac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$ et $B = \left\{ x + \dfrac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q} \right\}$.
Calculer $\inf A$ et $\inf B$.

### 1.2 Calculs théoriques de bornes supérieures ou inférieures

▷ **Exercice 1.4.** Soient $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ a \leqslant b + \varepsilon$.

1. Montrer que $a \leqslant b$.
2. Montrer que $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ a \leqslant b + \varepsilon)$ si et seulement si $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ a \leqslant b + 3\varepsilon \sin(\sqrt{2}))$.
3. Prouvez ou infirmez les affirmations suivantes :
   — $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ ((\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+,\ a \leqslant b + \varepsilon) \Rightarrow a < b)$,
   — $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \big((\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ a \leqslant b + \varepsilon) \Rightarrow a \leqslant b\big)$,
   — $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \big((\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ a < b + \varepsilon) \Rightarrow a < b\big)$,
   — $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \big((\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leqslant b\big)$,
   — $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ ((\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+,\ a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leqslant b)$,
   — $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ ((\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+,\ a < b + \varepsilon) \Rightarrow a < b)$.

▷ **Exercice 1.5.** Soient $(A,B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^2$ telles que $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ et $A$ et $B$ majorées.
On pose $A + B = \{a + b \in \mathbb{R} \mid a \in A\ ,\ b \in B\}$.

1. Montrer que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$. On pourra proposer deux preuves, l'une utilisant la caractérisation de la borne supérieure (avec des "$\varepsilon$") et l'autre non.
2. En remplaçant l'hypothèse $A$ et $B$ majorées par $A$ et $B$ minorées, que devient le résultat de la question précédente ?

▷ **Exercice 1.6.** Soit $A$ une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup\{|x-y| \mid (x,\ y) \in A^2\} = \sup(A) - \inf(A).$$

Que dire de $\inf\{|x-y| \mid (x,\ y) \in A^2\}$ ?

▷ **Exercice 1.7.**

1. Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout $(a,b) \in A \times B$, $a \leqslant b$. Comparer $\inf B$ et $\sup A$ après avoir justifié leur existence.
2. Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout $(a,b) \in A \times B$, $a < b$. Comparer $\inf B$ et $\sup A$ a près avoir justifié leur existence. On illustrera éventuellement le résultat par des exemples.
3. Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout $(a,b) \in A \times B$, il existe au moins une valeur $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a + \varepsilon > b$. $\inf B$ et $\sup A$ existent-ils et s'ils existent, sont-ils comparables ? Existe-t-il beaucoup de couples de parties $(A,B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^2$ satisfaisant cette propriété ?

▷ **Exercice 1.8.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\sup\{a_i \mid i = 1,\dots,n\} = \max\{a_i \mid i = 1,\dots,n\} \quad \text{et} \quad \inf\{a_i \mid i = 1,\dots,n\} = \min\{a_i \mid i = 1,\dots,n\}.$$

▷ **Exercice 1.9.**
On utilise, pour $q \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{k\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$, la notation $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant q} x_k = \max\{x_k \mid k \in [\![1,q]\!]\}$.
Soient $(n,p) \in {\mathbb{N}^*}^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbb{R}^{np}$.

1. Montrer qu'il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ : $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant p} a_{i_0,j} = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \max\limits_{1\leqslant j\leqslant p} a_{i,j}$.
2. Montrer qu'il existe $j_0 \in [\![1,p]\!]$ : $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i,j_0} = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant p} \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i,j}$.
3. En déduire que $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \min\limits_{1\leqslant i\leqslant p} a_{i,j} \leqslant \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \max\limits_{1\leqslant j\leqslant p} a_{i,j}$.
4. Donner un exemple pour lequel l'inégalité est stricte.

# 2 Nombres rationnels et irrationnels.

▷ **Exercice 2.1.**

1. Soit $p$ un nombre premier. Montrer que $\sqrt{p}$ est un nombre irrationnel. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer que $p^{\frac{1}{n}}$ est un nombre irrationnel.
2. Le produit de deux nombres rationnels est-il rationnel, qu'en est-il de celui de deux irrationnels ? et de celui d'un irrationnel par un rationnel ?

▷ **Exercice 2.2.** Soit $x$ un nombre réel. Que pensez-vous des énoncés suivants ?

- Si $x^7$ et $x^{12}$ sont rationnels, alors $x$ est rationnel.
- Si $x^9$ et $x^{12}$ sont rationnels, alors $x$ est rationnel.

▷ **Exercice 2.3.**

1. Montrer que $\sqrt{6} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. En déduire que $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

▷ **Exercice 2.4.**

1. Montrer que $\forall (r,r') \in \mathbb{Q}^2$, $r + r'\sqrt{6} = 0 \Rightarrow r = r' = 0$. En algèbre linéaire, on dit que la famille $(1,\sqrt{6})$ est libre sur le corps $\mathbb{Q}$.
2. En déduire que $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ est irrationnel.
3. Montrer de même que $\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

▷ **Exercice 2.5.** Dans cet exercice, nous supposons les nombres rationnels systématiquement représentés par une fraction irréductible, c'est à dire que le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux.

1. Démontrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, tout intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points contient une infinité de nombres rationnels dont le dénominateur est strictement supérieur à $N$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que l'intervalle $]x - \varepsilon_x,\ x + \varepsilon_x[$ ne contienne aucun nombre rationnel dont le dénominateur est inférieur à $N$ à l'exception de $x$ éventuellement.

▷ **Exercice 2.6. Approximation des réels par des rationnels.**

1. Soient $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{nq} \leqslant \dfrac{1}{q^2}$.
   *Indication. On pourra considérer l'ensemble des $\varepsilon_k = kx - \lfloor kx \rfloor$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ et justifier qu'ils appartiennent tous à* $[0,1[ = \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} \left[\dfrac{i}{n}, \dfrac{i+1}{n}\right[$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe deux suites $(p_k,q_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ telle que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*\ ,\ \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^2} \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} q_k = +\infty\ .$$
3. En déduire que, pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

▷ **Exercice 2.7.** Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ des nombres dyadiques, défini par $\mathcal{D}_2 = \left\{\dfrac{n}{2^p} \;\middle|\; (n,p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En est-il de même pour l'ensemble $\mathcal{D}_q$ des nombres $q$-adiques $\mathcal{D}_q = \left\{\dfrac{n}{q^p} \;\middle|\; (n,p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ ?

▷ **Exercice 2.8.** Soit $D$ une partie de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in D$, $D \setminus \{x\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. En déduire que, pour toute partie finie $F$ de $D$, $D \setminus F$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Posons $X = D \cap [a, b]$. Montrer que $X$ est dense dans $[a, b]$.
4. *Application :* justifier que $\mathbb{Q} \cap ]0, 1[$ est dense dans $[0, 1]$.

▷ **Exercice 2.9. Difficile** Des nombres sont écrits sur une feuille. On peut ajouter à cette liste toute moyenne arithmétique de nombres deux à deux distincts appartenant déjà à cette liste. Si la liste initiale est réduite à $\{0, 1\}$, montrer que

1. $\dfrac{1}{5}$ peut appartenir à la liste,
2. tout rationnel de $[0, 1]$ appartient à la liste.

# 3 Borne supérieure et fonctions réelles.

▷ **Exercice 3.1.** Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications polynômiales, à coefficients complexes, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Considérons l'application $N : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ définie pout tout $P \in \mathcal{P}$ par $N(P) = \sup\{|P(z)| \mid z \in \mathbb{U}\}$. Montrer que

1. $N$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ N(\lambda P) = |\lambda| N(P)$,
3. $\forall P \in \mathcal{P},\ N(P) = 0 \Rightarrow P = 0_{\mathcal{P}}$,
4. $\forall (P, Q) \in \mathcal{P}^2,\ N(P + Q) \leqslant N(P) + N(Q)$.

L'application $N$ ainsi définie, qui possède les quatre propriétés ci-dessus, est une **norme sur l'espace vectoriel** $\mathcal{P}$.

▷ **Exercice 3.2.** Reprendre l'énoncé précédent pour démontrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto N(a, b) = \max(|a|, |b|)$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

▷ **Exercice 3.3.** Soit $E$ un ensemble fixé contenant au moins deux éléments. On considère la relation binaire suivante sur $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R}) \times \mathcal{F}(E, \mathbb{R}),\ f \preccurlyeq g \iff \Big[\forall x \in E,\ f(x) \leqslant g(x)\Big].$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ définit une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$.
2. Soit $I$ un ensemble non vide et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'applications de $E$ dans $\mathbb{R}$ qui est majorée. Montrer qu'elle admet une borne supérieure.

▷ **Exercice 3.4.** Soit $f$ une application de $[0,\ 1]$ dans $[0,\ 1]$. Un point fixe de $f$ est une solution de l'équation $f(x) - x = 0$ d'inconnue $x \in [0,\ 1]$.

1. Montrer que si $f$ est continue sur $[0,\ 1]$, alors $f$ admet un point fixe (Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème des valeurs intermédiaires). Ce point fixe est-il unique ?
2. Montrer que si $f$ est croissante alors elle possède un point fixe (on pourra introduire l'ensemble $\{u \in [0,\ 1] | \forall x \in [0, u],\ f(u) > u\}$ et considérer sa borne supérieure). Ce point fixe est-il unique ?
3. Ce résultat s'étend-il aux applications croissantes d'un intervalle $[a,\ b]$ dans un intervalle $[a,\ b]$ pour tout $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ ?
4. Que dire si $f$ est décroissante de $[0,\ 1]$ dans $[0,\ 1]$ ?

▷ **Exercice 3.5.** Soient $(f_1,\ f_2) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^2}$.
On définit les fonctions $\sup(f_2,\ f_2)$ et $\inf(f_1,\ f_2)$ par

$$\sup(f_2,\ f_2) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sup\{f_1(t), f_2(t)\} \end{array} \right. \qquad \inf(f_2,\ f_2) \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \inf\{f_1(t), f_2(t)\} \end{array} \right.$$

Démontrer que, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on dispose pour tout $(f,\ g) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^2}$, des égalités :

$$\inf(-f,\ -g) = -\sup(f,\ g) \quad , \quad f + \sup(0,\ g) = \sup(f,\ f + g) \quad \text{et} \quad \sup(f,\ g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|).$$

▷ **Exercice 3.6. Existence d'une constante de lispschitz optimale**
Soit $X$ un intervalle réel et $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ une fonction lipschitzienne sur $X$ c'est-à-dire

$$\exists k \in \mathbb{R}_+ \ :\ \forall (x, y) \in X^2\ ,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

L'ensemble $\mathcal{K}_f$ des constantes de Lipschitz de la fonction $f$, est

$$\mathcal{K}_f = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall (x, y) \in X^2\ ,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|\}$$

Montrer que $\mathcal{K}_f$ admet un plus petit élément que l'on note $K_f$.
L'existence de ce plus petit élément s'interprète comme l'existence d'une constante de Lipschitz optimale (c'est-à-dire minimale) que l'on peut appeler **la** constante de Lipschitz (sous-entendu optimale) de $f$.

# 4 Questions courtes.

▷ **Exercice 4.1.**

1. Si, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ a \leqslant b + 2\varepsilon$, alors $a < b$.
2. Si, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ a \leqslant b + \varepsilon + \eta$, alors $a \leqslant b$.
3. Soit $A \subset [0,1]$ non vide. Alors $\inf(A) = \sup([0,1] \setminus A)$.
4. Soit $A \subset [0,1]$ non vide et $a \in A$. Alors $\inf(A) = \sup([0,a] \setminus A)$.
5. Toute partie non vide de $\mathbb{R}_+$ est bornée.
6. Nier le fait qu'une partie $A$ non vide de $\mathbb{R}$ est bornée.
7. La droite numérique achevée est un corps.
8. La droite numérique achevée est un anneau.
9. Toute partie non vide de la droite numérique achevée a un plus grand élément.
10. Toute partie de la droite numérique achevée est minorée.
11. La somme (le produit) de deux rationnels est un rationnel.
12. La somme (le produit) de deux irrationnels est un irrationnel.
13. $\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
14. $\left\{ \dfrac{n}{2a+3b} \middle| (n,\ a,\ b) \in \mathbb{Z}^3,\ 2a+3b \neq 0 \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
15. En disant qu'une partie $A$ de $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{Q}$ si pour tout $(x,\ y) \in \mathbb{Q}^2$ tels que $x < y$, il y a toujours un élément de $A$ qui est dans $]x,\ y[$, y-a-t-il des parties denses dans $\mathbb{Q}$ ? $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est-il dense dans $\mathbb{Q}$ ? et $\mathbb{Z}$ ?
16. Une fonction $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}_-$ tel que $\forall x \in X,\ f(x) \geqslant m$.
17. Les applications constantes de $X \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont croissantes, décroissantes, majorées et minorées.
18. Les applications croissantes et décroissantes de $\emptyset \subsetneq X \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications constantes.
19. Les applications majorées et minorées de $X \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications constantes.
20. Il n'existe pas d'application croissante strictement décroissante.
21. Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement croissante et $g$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ croissante. Alors $g \circ f$ (resp $f \circ g$) est strictement croissante.
22. Quelle est la négation de "$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée" ?
23. Quelle est la négation de "$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est majorée" ?
24. Quelle est la négation de "$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est égale à $g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$" ?
25. Quelle est la négation de "pour toute $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe $g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f$ et $g$ coïncident sur $Y \subset X$" ?
26. Si une fonction $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire est dérivable sur $X$, alors sa fonction dérivée est impaire.
27. Si une fonction $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique est dérivable sur $X$, alors sa fonction dérivée est périodique.
28. Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire est continue sur $\mathbb{R}$, alors ses primitives sont des fonctions paires.
29. Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire est continue sur $\mathbb{R}$, alors ses primitives sont des fonctions impaires.
30. Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire est continue sur $\mathbb{R}$, alors elle possède une unique primitive impaire, c'est la primitive qui ...
31. Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique est continue sur $\mathbb{R}$, alors ses primitives sont des fonctions périodiques.
32. Une fonction 1-périodique de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ est une application constante.

# Correction des exercices

## ▷ Corrigé de l'exercice 1.1

## ▷ Corrigé de l'exercice 1.2

1. $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
2. $B = \left\{ (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
3. $C = \left\{ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{p} \middle| (n,p) \in {\mathbb{N}^*}^2, n \leqslant p \right\}$.
   - ⋆ Montrons que $C$ est bornée.
     Soient $(n,p) \in {\mathbb{N}^*}^2$ fixés quelconques tels que $n \leqslant p$.
     $0 < \dfrac{1}{p} \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{p} \leqslant 1 - \dfrac{1}{p} < 1$.
     Par conséquent, 0 minore $C$ et 1 majore $C$.
   - ⋆ Montrons que $C$ admet une borne inférieure et une borne supérieure.
     $C$ est
     - ⋆⋆ une partie de $\mathbb{R}$,
     - ⋆⋆ non vide car $\dfrac{1}{1914} - \dfrac{1}{1918} \in C$,
     - ⋆⋆ minorée par $-1$, majorée par 1

     donc $C$ admet une borne inférieure et une borne supérieure.
   - ⋆ Montrons que $\sup C = 1$.
     - ⋆⋆ Méthode utilisant la caractérisation de la borne supérieure avec des $\varepsilon$.
       $(i)$ 1 majore $C$.
       $(ii)$ Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé quelconque.
       Posons $p_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$ et $n_0 = 1 \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $p_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ donc $\dfrac{1}{p_0} < \varepsilon$.
       La condition $p_0 \geqslant n_0$ est satisfaite donc $c_0 = \dfrac{1}{n_0} - \dfrac{1}{p_0} \in C$ et $c_0 + \varepsilon = 1 + \underbrace{\varepsilon - \dfrac{1}{p_0}}_{>0} > 1$.
     - ⋆⋆ Méthode utilisant la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.
       $(i)$ 1 majore $C$.
       $(ii)$ Posons $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.
       Il est immédiat de voir que $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $C$ ($c_k$ est obtenu en effectuant $n \leftarrow 1 \in \mathbb{N}^*$, $p \leftarrow k+1 \in \mathbb{N}^*$ et pour ces valeurs la condition $n \leqslant p$ est satisfaite) qui converge vers 1.
   - ⋆ Montrons que $C$ n'admet pas de plus grand élément.
     Par l'absurde, supposons que $C$ admet un plus grand élément. Alors (cf théorème du cours) $C$ admet une borne supérieure (ce que l'on sait déjà !) et $\sup C = \max C$.
     Or $\sup C = 1$ donc $\max C = 1$.
     Par conséquent, puisque le plus grand élément d'un ensemble appartient à l'ensemble, $1 \in C$. Or (voir la preuve de $C$ est borné) nous avons montré que
     $$\forall c \in C \ , \ c < 1$$
     donc $1 \notin C$, d'où une contradiction.
   - ⋆ Montrons que $C$ admet un plus petit élément qui est 0.
     $(i)$ 0 minore $C$.
     $(ii)$ pour $n_0 \leftarrow 1 \in \mathbb{N}^*$ et $p \leftarrow 1 \in \mathbb{N}^*$, la condition $n_0 \leqslant p_0$ est satisfaite donc $c_0 = \dfrac{1}{n_0} - \dfrac{1}{p_0} = 1 - 1 = 0$ appartient à $C$ donc $0 \in C$.
     Par conséquent $C$ admet un plus petit élément et $\min C = 0$.
   - ⋆ Montrons que $\inf C = 0$.
     Par théorème du cours, lorsqu'un ensemble $C$ admet un plus petit élément, il admet une borne inférieure et $\inf C = \min C$.
     Ici, $C$ admet un plus petit élément et $\min C = 0$ donc $C$ admet une borne inférieure et $\inf C = 0$.
     **Remarque : on peut aussi calculer directement la valeur de la borne inférieure même si c'est maladroit puisque $C$ admet un plus petit élément. Donnons le détail technique, à titre d'exemple.**
     - ⋆⋆ Méthode utilisant la caractérisation de la borne inférieure avec des $\varepsilon$.

$(i)$ 0 minore $C$.

$(ii)$ Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé quelconque.

Posons $p_0 = n_0 = 1 \in \mathbb{N}^*$. La condition $p_0 \geqslant n_0$ est satisfaite.

$c_0 = \dfrac{1}{n_0} - \dfrac{1}{p_0} = 0 \in C$ et $c_0 - \varepsilon = \underbrace{-\varepsilon}_{<0} < 0$.

⋆⋆ Méthode utilisant la caractérisation séquentielle de la borne inférieure.

$(i)$ 0 minore $C$.

$(ii)$ Posons $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Il est immédiat de voir que $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $C$ ($c_k$ est obtenu en effectuant $n \leftarrow k+1 \in \mathbb{N}^*$, $p \leftarrow 2k+1 \in \mathbb{N}^*$ et pour ces valeurs la condition $n \leqslant p$ est satisfaite) qui converge vers 0.

4. $D = \left\{ \dfrac{p+1}{n} \middle| \begin{array}{l} (n,p) \in \mathbb{N}^{*2} \\ p \geqslant n \end{array} \right\}$.

⋆ Montrons que $D$ n'est pas majorée.

Soit $A \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.

Posons $p_0 = \lfloor |A| \rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$ et $n_0 = 1 \in \mathbb{N}^*$. On a donc $p_0 \geqslant n_0$.

L'élément $d_0 = \dfrac{p_0+1}{n_0}$ appartient à $D$ et

$$d_0 = \lfloor |A| \rfloor + 2 \geqslant |A| - 1 + 2 \geqslant |A| \geqslant A$$

Ainsi, $D$ n'est pas majorée donc elle n'admet pas de borne supérieure (sinon elle constituerait un majorant !) ni de plus grand élément (sinon il constituerait un majorant !).

⋆ Montrons que $D$ est pas minorée par 1.

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$ fixés quelconques tels que $p \geqslant n$.

$$\frac{p+1}{n} \geqslant \frac{n+1}{n} \geqslant 1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{>0} > 1$$

⋆ Montrons que $D$ admet une borne inférieure.

$D$ est

⋆⋆ une partie de $\mathbb{R}$,

⋆⋆ non vide car $2 = \dfrac{1+1}{1} \in D$ (pour $n \leftarrow 1 \in \mathbb{N}^*$ et $p \leftarrow 1 \in \mathbb{N}^*$ et la condition $p \geqslant n$ est satisfaite),

⋆⋆ minorée par 1,

donc $D$ admet une borne inférieure.

⋆ Montrons que $\inf D = 1$.

⋆⋆ Méthode utilisant la caractérisation de la borne inférieure avec des $\varepsilon$.

$(i)$ 1 minore $D$.

$(ii)$ Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé quelconque.

Posons $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ et $p_0 = n_0$ de sorte que $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ donc $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$.

On a $(n_0, p_0) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $p_0 \geqslant n_0$ donc $d_0 = \dfrac{p_0+1}{n_0} \in D$ et

$$d_0 - \varepsilon = \frac{n_0+1}{n_0} - \varepsilon = 1 + \underbrace{\frac{1}{n_0} - \varepsilon}_{<0} < 1$$

⋆⋆ Méthode utilisant la caractérisation séquentielle de la borne inférieure.

$(i)$ 1 minore $D$.

$(ii)$ Posons $(d_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{(k+1)+1}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Il est immédiat de voir que $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $D$ ($d_k$ est obtenu en posant $n \leftarrow k+1 \in \mathbb{N}^*$, $p \leftarrow k+1 \in \mathbb{N}^*$ et pour ces valeurs, la condition $n \leqslant p$ est satisfaite) qui converge vers 1.

⋆ Montrons que $D$ n'admet pas de plus petit élément.

Par l'absurde, supposons que $D$ admet un plus petit élément. Alors (cf théorème du cours) $D$ admet une borne inférieure (ce que l'on sait déjà !) et $\inf D = \min D$.

Or $\inf D = 1$ donc $\min D = 1$.

Par conséquent, puisque le plus petit élément d'un ensemble appartient à l'ensemble, $1 \in D$. Or (voir la preuve de $D$ est minorée) nous avons montré que

$$\forall d \in D \ , \ d > 1$$

donc $1 \notin D$, d'où une contradiction.

**▷ Corrigé de l'exercice 1.3** Posons $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$

L'étude des variations de $f$ montrer que
- ⋆ 2 minore $f(\mathbb{R}_+^*)$,
- ⋆ $f(1) = 2$,

donc $f(\mathbb{R}_+^*)$ admet un ppe qui vaut 2
donc $f(\mathbb{R}_+^*)$ admet une borne inférieure qui vaut 2 : $\inf A = 2$.

Pour $B$ c'est un peu plus délicat car $f(x) = 2 \iff x = 1$ et $1 \in \mathbb{Q}$ donc on conjecture que $B$ admet 2 comme borne inférieure mais que ce n'est pas un ppe.
Utilisons la caractérisation séquentielle de la borne inférieure.
- ⋆ 2 minore $f(\mathbb{R}_+^*)$ or $\mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}_+^*$ donc 2 minore $f(\mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q})$,
- ⋆ posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$ et $b_n = f(x_n)$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q}$ donc $(b_n) \in B^{\mathbb{N}}$.
  De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 2$.

Ainsi, par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $\inf B = 2$.

**▷ Corrigé de l'exercice 1.4**

**▷ Corrigé de l'exercice 1.5**

1. • $A$ (resp. $B$) est une $\left\{ \begin{array}{l} \text{partie de } \mathbb{R}, \\ \text{non vide}, \\ \text{majorée}, \end{array} \right.$ donc $\sup A$ (resp. $\sup B$) existe.

   • $\forall (a,b) \in A \times B$, $a + b \leqslant \sup A + \sup B$ donc $A + B$ est une $\left\{ \begin{array}{l} \text{partie de } \mathbb{R}, \\ \text{non vide}, \\ \text{majorée}, \end{array} \right.$ donc $\sup(A+B)$ existe.

   • **Méthode 1 : directe, sans "$\varepsilon$".**
   Nous avons vu que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$, or $\sup(A+B)$ est le plus petit des majorants de $A + B$ si bien que

$$\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B \tag{1}$$

   Soient $(a,b) \in A \times B$ fixés quelconques.
   Par définition de $\sup(A+B)$,

$$a + b \leqslant \sup(A+B)$$

   donc

$$a \leqslant \sup(A+B) - b$$

   Cela étant vrai pour tout $a \in A$ et pour le $b$ fixé quelconque,

$$\forall a \in A \ , \ a \leqslant \sup(A+B) - b$$

   donc $\sup(A+B) - b$ majore $A$, or $\sup A$ est le plus petit des majorants de $A$ si bien que

$$\sup A \leqslant \sup(A+B) - b \ .$$

   Or cela est vrai pour tout $b \in B$, donc

$$\forall b \in B \ , \ , b \leqslant \sup(A+B) - \sup A$$

   donc $\sup(A+B) - \sup A$ majore $B$, or $\sup B$ est le plus petit des majorants de $B$ si bien que

$$\sup A + \sup B \leqslant \sup(A+B) \tag{2}$$

   • **Méthode 2 : preuve par la caractérisation de la borne supérieure.**
   - ⋆ Nous avons vu que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.
   - ⋆ Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé quelconque.
     Appliquons la caractérisation de la borne supérieure de $A$ en remplaçant le "$\varepsilon$" de la caractérisation par $\dfrac{\varepsilon}{2}$ :

$$\exists a \in A \ : \ a \leqslant \sup A < a + \frac{\varepsilon}{2} \ . \tag{3}$$

Appliquons la caractérisation de la borne supérieure de $B$ en remplaçant le "$\varepsilon$" de la caractérisation par $\frac{\varepsilon}{2}$ :

$$\exists b \in B \ : \ b \leqslant \sup B < b + \frac{\varepsilon}{2} \ . \tag{4}$$

Posons $c = a + b$.
Par conséquent, en sommant les inégalités (3) et (4),

$$\exists c \in A + B \ : \ c \leqslant \sup A + \sup B < c + \varepsilon \ .$$

Les deux points ci-dessus permettent de conclure en utilisant la caractérisation de la borne sup de $A + B$.

Ainsi, (1) et (2) conduisent à $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

2. En remplaçant l'hypothèse $A$ et $B$ majorées par $A$ et $B$ minorées, on peut utiliser le lemme du cours reliant les ensembles $\widehat{A} = \{-a | a \in A\}$ et $\widehat{B} = \{-b | b \in B\}$ aux ensembles $A$ et $B$ pour justifier que $\inf A$ et $\inf B$ existent et valent

$$\inf A = -\sup \widehat{A} \qquad \inf B = -\sup \widehat{B} \ . \tag{5}$$

De plus les parties de $\mathbb{R}$ notées $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont non vides et majorés si bien qu'en leur appliquant le résultat de la première question,

$$\sup(\widehat{A} + \widehat{B}) = \sup \widehat{A} + \sup \widehat{B} \ .$$

En observant alors que $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{A + B}$,

$$\sup \widehat{A + B} = \sup \widehat{A} + \sup \widehat{B} \ .$$

si bien qu'en utilisant à nouveau le lemme du cours appliqué à la partie non vide et minorée $A + B$, $\sup \widehat{A + B} = -\inf(A + B)$. On obtient donc

$$-\inf(A + B) = -\inf A - \inf B$$

d'où $\boxed{\inf(A + B) = \inf A + \inf B \ .}$

▷ **Corrigé de l'exercice 1.6** $A$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée donc elle admet une borne inférieure et une borne supérieure.

1. Montrons que $\sup\{|x - y| \mid (x, y) \in A^2\}$ existe.
L'ensemble $B = \{|x - y| \mid (x, y) \in A^2\}$ est
   - ⋆ une partie non vide : $A \neq \emptyset$ donc $\exists a \in A$ donc $0 = a - a \in B$,
   - ⋆ une partie de $\mathbb{R}$,
   - ⋆ une partie majorée :

   Ainsi, $\{|x - y| \mid (x, y) \in A^2\}$ admet une borne supérieure et $\sup\{|x - y| \mid (x, y) \in A^2\} \leqslant \sup A - \inf A$.
2. Montrons que $\sup\{|x - y| \mid (x, y) \in A^2\} \geqslant \sup A - \inf A$.
   - **Méthode 1, sans "$\varepsilon$".**
   Soient $x \in A$ fixé quelconque.
   Alors $\forall y \in A$, $x - y \leqslant |x - y| \leqslant \sup B$ si bien que

   $$\forall y \in A \ , \ x - \sup B \leqslant y$$

   donc $x - \sup B$ minore $A$ si bien que

   $$x - \sup B \leqslant \inf A$$

   Relachons le caractère fixé de $x$ pour obtenir

   $$\forall x \in A \ , \ x - \sup B \leqslant \inf A$$

   soit

   $$\forall x \in A \ , \ x \leqslant \sup B + \inf A$$

   si bien que $\sup B + \sup A$ majore $A$ donc

   $$\sup A \leqslant \sup B + \inf A$$

   soit

   $$\sup A - \inf A \leqslant \sup B$$

- **Méthode 2, avec des "$\varepsilon$".**
  ****
  dessin
  ****
  Puisque $A \neq \emptyset$, $\inf A \leqslant \sup A$.
  — Cas $\sup A - \inf A = 0$.
  Supposons que $A$ admet au moins deux éléments $a_1 < a_2$, alors
  $$\inf A \leqslant a_1 < a_2 \leqslant \sup A$$
  donc $\sup A - \inf A > 0$ ce qui est une contradiction.
  Sachant que $A \neq \emptyset$, on peut donc affirmer que $A$ est un singleton : $A = \{a\}$ si bien que $B = \{0\}$ donc $\sup B = 0 = \sup A - \inf A$.
  — Cas $\sup A - \inf A > 0$.
  Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé quelconque.
  — Supposons que $\varepsilon < \sup A - \inf A$.
  Appliquons la caractérisation de la borne supérieure pour $\varepsilon_0 = \dfrac{\sup A - \inf A - \varepsilon}{2} > 0$ :
  $$\exists a_+ \in A \ : \ a_+ > \sup A - \varepsilon_0$$
  Appliquons la caractérisation de la borne inférieure pour $\varepsilon_0 = \dfrac{\sup A - \inf A - \varepsilon}{2} > 0$ :
  $$\exists a_- \in A \ : \ a_- < \inf A + \varepsilon_0$$
  Alors $a_+ - a_- > \underbrace{\sup A - \inf A - \varepsilon}_{>0}$ donc $|a_+ - a_-| \geqslant \sup A - \inf A - \varepsilon$ si bien que
  $$\exists b = |a_+ - a_-| \in B \ : \ b \geqslant \sup A - \inf A - \varepsilon$$
  — Supposons que $\varepsilon \geqslant \sup A - \inf A$.
  Fixons $b \in B$ quelconque.
  Alors $b \geqslant 0$ et $\sup A - \inf A - \varepsilon \leqslant 0$ donc
  $$b \geqslant \sup A - \inf A - \varepsilon$$
  Ainsi, nous venons de prouver que
  $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ , \ \exists b \in B \ : \ b \geqslant \sup A - \inf A - \varepsilon$$
  or $\sup A - \inf A$ majore $B$ si bien que la caractérisation de la borne supérieure permet de conclure que
  $$\sup B = \sup A - \inf A$$

$B = \{|x - y| \mid (x, y) \in A^2\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par 0 donc elle admet une borne inférieure. De plus, $\exists a \in A$ tel que $0 = |a - a|$ donc $0 \in B$ si bien que $B$ admet un plus petit élément qui vaut 0 :
$$\inf B = \min B = 0$$

### ▷ Corrigé de l'exercice 1.7

1. $A$ et $B$ deux parties non vides donc on peut fixer $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$.
   - $A$ est
     - ⋆ une partie de $\mathbb{R}$,
     - ⋆ non vide, elle contient $a_0$,
     - ⋆ majorée par $b_0$ car $\forall a \in A$, $a \leqslant b_0$,

     donc elle admet une borne supérieure.
   - $B$ est
     - ⋆ une partie de $\mathbb{R}$,
     - ⋆ non vide, elle contient $b_0$,
     - ⋆ minorée par $a_0$ car $\forall b \in B$, $a_0 \leqslant b$,

     donc elle admet une borne inférieure.
   - Soit $a \in A$ fixé quelconque.
     Par hypothèse,
     $$\forall b \in B \ , \ a \leqslant b$$
     donc $a$ est un minorant de $B$ donc
     $$a \leqslant \max m(B) = \inf B$$

Relâchons le caractère fixé de $a$ :

$$\forall a \in A \ , \ a \leqslant \inf B$$

donc $\inf B$ majore $A$ donc

$$\sup A = \min M(A) \leqslant\in B$$

Par conséquent $\sup A \leqslant \inf B$.

2. Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout $(a,b) \in A \times B$, $a < b$.
Puisque l'inégalité stricte $a < b$ implique l'inégalité large $a \leqslant b$, les parties $A$ et $B$ satisfont les hypothèses de la question 1 donc $\inf B$ et $\sup A$ existent et $\sup A \leqslant \inf B$.

On pourrait espérer que l'hypothèse $a < b$ pour tout $(a,b) \in A \times B$, permette de montrer que $\sup A < \inf B$. Cela est illusoire. En effet pour $A = [0,1[$ et $B = ]1,2]$ on a d'une part $\forall (a,b) \in A \times B$, $a < b$ et d'autre part $\sup A = 1 = \inf B$.

3. Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$ fixées quelconques.
Soient $(a,b) \in A \times B$ fixés quelconques.
Posons $\varepsilon = 1 + \max(0, b-a)$.
Alors $\varepsilon > 0$ et
   - ⋆ si $a > b$, $\varepsilon = 1$ donc $a + \varepsilon = a + 1 > b$,
   - ⋆ sinon, $a \leqslant b$ donc $\varepsilon = 1 + b - a$ donc $a + \varepsilon = a + 1 + b - a = 1 + b > b$.

   Par conséquent, on a toujours $a + \varepsilon > b$.

   Ainsi, deux parties non vides $A$ et $B$ de $\mathbb{R}$ satisfont toujours la propriéété

$$\forall (a,b) \in A \times B \ , \ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ : \ a + \varepsilon > b \ .$$

   En admettant l'existence de $\inf B$ et $\sup A$, on ne peut pas les comparer en général :
   - ⋆ si $(A,B) = (\{1\},\{2\})$, $\inf B = 2 > 1 = \sup A$,
   - ⋆ si $(A,B) = (\{2\},\{1\})$, $\inf B = 1 < 2 = \sup A$,
   - ⋆ si $(A,B) = ([0,1],[1,2])$, $\inf B = 1 = 1 = \sup A$.

### ▷ Corrigé de l'exercice 1.8

Posons $A = \{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$.
$A$ est une partie
- non vide,
- finie,
- d'un ensemble totalement ordonné qui est $(\mathbb{R}, \leqslant)$

donc $A$ admet un plus petit élément et un plus grand élément.
De plus, nous savons que dans tout ensemble ordonné $(E, \preccurlyeq)$, si une partie $A$ a un plus grand élément (resp. plus petit élément), alors d'une part elle admet une borne supérieure (resp. inférieure) et d'autre part $\sup\limits_E A = \max A$ (resp. $\inf\limits_E A = \min A$). Ceci permet de conclure.

### ▷ Corrigé de l'exercice 1.9

1. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, posons $M_i = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} a_{i,j}$.
   $M_i$ est bien défini car c'est le plus grand élément de la partie finie non vide $\{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,p}\}$ de l'ensemble totalement ordonné $(\mathbb{R}, \leqslant)$.
   $\{M_1, \dots, M_n\}$ est une partie finie non vide de l'ensemble totalement ordonné $(\mathbb{R}, \leqslant)$ donc elle admet un plus petit élément :

$$\exists i_0 \in [\![1,n]\!] \ : \ M_{i_0} = \min\{M_1, \dots, M_n\}$$

   soit

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant p} a_{i_0,j} = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \max_{1 \leqslant j \leqslant p} a_{i,j} \tag{6}$$

2. Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, posons $P_i = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i,j}$.
   $P_j$ est bien défini car c'est le plus petit élément de la partie finie non vide $\{a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}\}$ de l'ensemble totalement ordonné $(\mathbb{R}, \leqslant)$.
   $\{P_1, \dots, P_p\}$ est une partie finie non vide de l'ensemble totalement ordonné $(\mathbb{R}, \leqslant)$ donc elle admet un plus grand élément :

$$\exists j_0 \in [\![1,p]\!] \ : \ P_{j_0} = \max\{P_1, \dots, P_p\}$$

   soit

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i,j_0} = \max_{1 \leqslant j \leqslant p} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i,j} \tag{7}$$

3. $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant p}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i,j} \underbrace{=}_{\text{égalité (7)}} \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i,j_0} \leqslant a_{i_0,j_0} \leqslant \max\limits_{1\leqslant j\leqslant p} a_{i_0,j} \underbrace{=}_{\text{égalité (6)}} \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant p} a_{i,j}$

   Ainsi $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant p}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i,j} \leqslant \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant p} a_{i,j}$.

4. Considérons la matrice $\begin{bmatrix} a_{1,1}=1 & a_{1,2}=3 \\ a_{2,1}=3 & a_{2,2}=2 \end{bmatrix}$.

   Dans ce cas,
   - ⋆ $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 2}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 2} a_{i,j} = \min\{a_{1,2}=3, a_{2,1}=3\} = 3$,
   - ⋆ $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 2}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 2} a_{i,j} = \max\{a_{1,1}=1, a_{2,2}=2\} = 2$,

   d'où l'inégalité stricte sur cet exemple.

### ▷ Corrigé de l'exercice 2.1

1. Soit $p$ un nombre premier.
   - Montrons que $\sqrt{p}$ est un nombre irrationnel.
     Par l'absurde, supposons que $\sqrt{p} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
     Alors $\exists (a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ : $\begin{cases} \sqrt{p}=\dfrac{a}{b} \\ a\wedge b = 1 \end{cases}$
     En élevant au carré, $p=\dfrac{a^2}{b^2}$ donc $pb^2=a^2$ donc $p \mid a^2$ or $p$ est un nombre premier donc $p \mid a$.
     Il existe $a'\in\mathbb{Z} : a = pa'$ et en injectant dans l'égalité $pb^2=a^2$, on obtient $pb^2 = p^2a'^2$ donc $p(b^2-pa'^2)=0$ or $\mathbb{Z}$ est un anneau intègre et $p\neq 0$ donc $b^2-pa'^2=0$ donc $b^2=pa'^2$ donc $p\mid b^2$, or $p$ est un nombre premier donc $p\mid b$.
     Par conséquent, $p$ est un diviseur commun à $a$ et $b$ ce qui contredit $a\wedge b=1$.
   - Montrons plus généralement que $p^{\frac{1}{n}}$ est un nombre irrationnel pour tout $n\geqslant 2$.
     Par l'absurde, supposons que $p^{\frac{1}{n}}\in\mathbb{Q}$.
     Alors $\exists (a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ : $\begin{cases} \sqrt[n]{p}=\dfrac{a}{b} \\ a\wedge b = 1 \end{cases}$
     En élevant à la puissance $n$, $p=\dfrac{a^n}{b^n}$ donc $pb^n=a^n$ donc $p\mid a^n$ or $p$ est un nombre premier donc $p\mid a$.
     Il existe $a'\in\mathbb{Z} : a=pa'$ et en injectant dans l'égalité $pb^n=a^n$, on obtient $pb^n=p^na'^n$ donc $p(b^n-p^{n-1}a'^n)=0$ or $\mathbb{Z}$ est un anneau intègre et $p\neq 0$ donc $b^n-p^{n-1}a'^n=0$ donc $b^n=p^{n-1}a'^n 2$ or $n-1\in\mathbb{N}^*$ donc $p\mid b^n$, or $p$ est un nombre premier donc $p\mid b$.
     Par conséquent, $p$ est un diviseur commun à $a$ et $b$ ce qui contredit $a\wedge b=1$.
2. - Le produit de deux nombres rationnels est rationnel.
   - On ne peut rien dire du produit de deux irrationnels : $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2\in\mathbb{Q}$ et $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
   - Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel si le rationnel est non nul et un rationnel si le rationnel est nul !

### ▷ Corrigé de l'exercice 2.2

- « Si $x^7$ et $x^{12}$ sont rationnels, alors $x$ est rationnel ». Cette assertion est vraie, en effet puisque 7 et 12 sont premiers entre eux, d'après la relation de Bézout, il existe $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $7p+12q=1$ donc $x=x^1=(x^7)^p(x^{12})^q\in\mathbb{Q}$ car $(x^7)^p\in\mathbb{Q}$ et $(x^{12})^q\in\mathbb{Q}$.
- « Si $x^9$ et $x^{12}$ sont rationnels, alors $x$ est rationnel ». Cette assertion est fausse, par exemple $x=\sqrt[3]{2}$ est un nombre irrationnel (généraliser l'irrationnalité de $\sqrt{2}$), $\sqrt[3]{2}^9=2^3\in\mathbb{Q}$ et $\sqrt[3]{2}^{12}=2^4\in\mathbb{Q}$.

### ▷ Corrigé de l'exercice 2.3

1. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{6}$ est rationnel.
   Il existe $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ : $\sqrt{6}=\dfrac{p}{q}$ et $p\wedge q=1$.
   En élevant au carré, $6=\dfrac{p^2}{q^2}$ donc $6q^2=p^2$ donc $3\mid p^2$ or 3 est un nombre premier donc $3\mid p$.
   Il existe $p'\in\mathbb{Z} : p=3p'$ et en injectant dans l'égalité $6q^2=p^2$, on obtient $6q^2=9p'^2$ donc $2q^2=3p'^2$ donc $3\mid 2q^2$, or $3\wedge 2=1$ donc $3\mid q^2$ or 3 est un nombre premier donc $3\mid q$.
   Par conséquent, 3 est un diviseur commun à $p$ et $q$ ce qui contredit $p\wedge q=1$.

   Ainsi, $\sqrt{6}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

2. Raisonnons par l'absurde en supposant que $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$.
   Alors $a^2\in\mathbb{Q}$ donc $2+2\sqrt{6}+3=5+2\sqrt{6}=a^2\in\mathbb{Q}$ si bien que $\sqrt{6}=\dfrac{a^2-5}{2}$ est rationnel ce qui est en contradiction avec le résultat de la question précédente.

Par conséquent, $\boxed{a = \sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ est irrationnel.}}$

### ▷ Corrigé de l'exercice 2.4

1. Soient $(r, r') \in \mathbb{Q}^2$ fixés quelconques tels que $r + r'\sqrt{6} = 0$.
   Supposons que $r' \neq 0$, alors $\sqrt{6} = \dfrac{-r}{r'} \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit l'irrationnalité de $\sqrt{6}$ (voir question 1 de l'exercice 2.3).
   Par conséquent, $r' = 0$ or $r + r' \times \sqrt{6} = 0$ donc $r = 0$.
   $\boxed{\text{Ainsi, } \forall (r, r') \in \mathbb{Q}^2,\ r + r'\sqrt{6} \in \mathbb{Q} \Rightarrow r = r' = 0.}$
2. Raisonnons par l'absurde en supposant que $a = \sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.
   Alors $\sqrt{6} - a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ si bien qu'en élevant au carré,
   $$a^2 + 6 - 2a\sqrt{6} = 2 + 3 + 2\sqrt{6} \quad \text{donc} \quad \underbrace{a^2 + 1}_{\in \mathbb{Q}} - \underbrace{(2a + 2)}_{\in \mathbb{Q}} \sqrt{6} = 0$$
   si bien que la question 1 permet d'affirmer que $\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + 1 & = & 0 \\ 2a + 2 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + 1 & = & 0 \\ a & = & -1 \end{array} \right. \Rightarrow 1 + 1 = 0$ ce qui est une contradiction.
   $\boxed{\text{Ainsi } \sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3} \text{ est irrationnel.}}$
3. Raisonnons par l'absurde en supposant que $a = \sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.
   Alors $\sqrt{5} - a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ si bien qu'en élevant au carré,
   $$a^2 + 5 - 2a\sqrt{5} = 2 + 3 + 2\sqrt{6} \quad \text{donc} \quad a^2 - 2\sqrt{6} = 2a\sqrt{5}$$
   si bien qu'en élevant à nouveau au carré,
   $$a^4 + 24 - 4a^2\sqrt{6} = 20a^2 \quad \text{donc} \quad \underbrace{a^4 - 20a^2 + 24}_{\in \mathbb{Q}} - \underbrace{4a^2}_{\in \mathbb{Q}} \sqrt{6} = 0$$
   si bien que la question 1 permet d'affirmer que $\left\{ \begin{array}{rcl} a^4 - 20a^2 + 24 & = & 0 \\ 4a^2 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^4 - 20a^2 + 24 & = & 0 \\ a & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow$ $24 = 0$ ce qui est une contradiction.
   $\boxed{\text{Ainsi, } \sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ est irrationnel.}}$

### ▷ Corrigé de l'exercice 2.5

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque.
   - Montrons que tout intervalle de la forme $]u, v[$ avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u < v$ contient une infinité de nombre rationnels dont le dénominateur est strictement supérieur à $N$.
     Raisonnons par l'absurde en supposant que $]u, v[$ contient un nombre fini de nombre rationnels dont le dénominateur est strictement supérieur à $N$. En posant
     $$E = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, \begin{array}{l} (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \\ p \wedge q = 1 \\ q \geqslant N + 1 \end{array} \right\}$$
     cela revient à supposer que $E \cap ]u, v[$ est un ensemble fini.
     Posons $F = \left\{ \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, \begin{array}{l} (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \\ p \wedge q = 1 \\ q \leqslant N \end{array} \right\}$.
     Montrons que $F \cap ]u, v[$ est un ensemble fini.
     Soient $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ fixés quelconques tels que $\left\{ \begin{array}{l} p \wedge q = 1 q \leqslant N \\ \dfrac{p}{q} \in ]u, v[ \end{array} \right.$.
     On a donc
     $$u < \frac{p}{q} < v \underbrace{\Rightarrow}_{q > 0} qu < p < qv \quad \underbrace{\Rightarrow}_{1 \leqslant q \leqslant N} \quad -N|u| \leqslant -q|u| \leqslant qu < p < qv \leqslant q|v| \leqslant N|v|$$

donc, $p \in \mathbb{Z} \cap ]-N|u|, N|v|[$ et $q \in [\![1, N]\!]$ donc il n'existe qu'un nombre fini de valeurs possible pour $p$ et $q$, ce qui prouve que $F$ est fini.
Or $\mathbb{Q} = E \cup F$ donc $\mathbb{Q} \cap ]u, v[ = (E \cap ]u, v[) \cup (F \cap ]u, v[)$ si bien que $\mathbb{Q} \cap ]u, v[$ est un ensemble fini.
Or la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ impose que $\mathbb{Q} \cap ]u, v[$ ne peut pas être fini. En effet, la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ impose que $\mathbb{Q} \cap ]u, v[$ n'est pas vide donc $\mathbb{Q} \cap ]u, v[$ est une partie finie non vide de $(\mathbb{R}, \leqslant)$ ensemble totalement ordonné donc elle admet un plus petit élément $r = \min \mathbb{Q} \cap ]u, v[$. Par définition d'un plus petit élément, $r \in \mathbb{Q} \cap ]u, v[$ donc $u < r$. Par conséquent $]u, r[ \neq \emptyset$ donc par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $\exists r' \in \mathbb{Q} : r' \in \mathbb{Q} \cap ]u, r[$. Mais alors $r' \in \mathbb{Q} \cap ]u, v[$ et $r' < r$ ce qui contredit la définition de $r$, le plus petit élément de $\mathbb{Q} \cap ]u, v[$.
Ainsi l'hypothèse de finitude de $E \cap ]u, v[$ est fausse.

- Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points fixé quelconque.
  Alors $\exists (u, v) \in I^2$ fixés quelconques tels que $u < v$.
  Puisque $I$ est un intervalle, $]u, v[ \subset I$.
  D'après le premier point ci-dessus, $]u, v[$ contient une infinité de nombre rationnels dont le dénominateur est strictement supérieur à $N$ donc $I$ contient une infinité de nombre rationnels dont le dénominateur est strictement supérieur à $N$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$ fixés quelconques.
   Reprenons les notations de la question précédente :

$$E = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \middle| \begin{array}{l} (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \\ p \wedge q = 1 \\ q \geqslant N+1 \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \middle| \begin{array}{l} (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \\ p \wedge q = 1 \\ q \leqslant N \end{array} \right\}$$

   de sorte que $\mathbb{Q} = E \cup F$ avec de plus $E \cap F = \emptyset$.
   En reprenant le raisonnement du point précédent appliqué pour $u \leftarrow x - 1$ et $v \leftarrow x + 1$, on obtient que $F \cap ]x - 1, x + 1[$ est fini.
   Posons $F_- = F \cap ]x - 1, x[$, $F_+ = F \cap ]x, x + 1[$ si bien que $F_-$, $\{x\}$ et $F_+$ sont disjoints et leur union reconstitue l'ensemble fini $F \cap ]x - 1, x + 1[$.

   ⋆ Si $F_+ = \emptyset$, posons $\varepsilon_x^+ = 1$ de sorte que $]x, x + \varepsilon_x^+[ \cap F = \emptyset$,
   ⋆ sinon $F_+ \neq \emptyset$, $F_+$ est une partie finie non vide de $(\mathbb{R}, \leqslant)$ qui est totalement ordonné donc elle admet un plus petit élément : $r_+ = \min F_+$. Par définition d'un plus petit élément, $r_+ \in F \cap ]x, x + 1[$ donc $x < r_+$ ce qui permet de poser $\varepsilon_x^+ = r_+ - x > 0$ de sorte que $]x, x + \varepsilon_x^+[ \cap F = \emptyset$.

   ⋆ Si $F_- = \emptyset$, posons $\varepsilon_x^- = 1$ de sorte que $]x - \varepsilon_x^-, x[ \cap F = \emptyset$,
   ⋆ sinon $F_- \neq \emptyset$, $F_-$ est une partie finie non vide de $(\mathbb{R}, \leqslant)$ qui est totalement ordonné donc elle admet un plus grand élément : $r_- = \max F_-$ Par définition d'un plus petit élément, $r_- \in F \cap ]x - 1, x[$ donc $r_- < x$ ce qui permet de poser $\varepsilon_x^- = x - r_- > 0$ de sorte que $]x - \varepsilon_x^-, x[ \cap F = \emptyset$.

   Posons $\varepsilon_x = \min(\varepsilon_x^+, \varepsilon_x^-)$. On vérifie alors d'une part que $\varepsilon_x > 0$ et d'autre part que $]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[ \cap F$ est vide ou réduit à $\{x\}$.

### ▷ Corrigé de l'exercice 2.6

1. Posons, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varepsilon_k = kx - \lfloor kx \rfloor$.
   D'après les propriétés de la fonction partie entière ($\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$), $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\varepsilon_k \in [0, 1[$.
   De plus, l'intervalle $[0, 1[$ sécrit comme la réunion disjoints des intevalles $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right[$ lorsque $j$ parcourt $[\![0, n - 1]\!]$.
   Le principe des tiroirs de Dirichlet, appliqué à la répartition des $(n + 1)$ réels dans les $n$ intervalles de la forme $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right[$ lorsque $j$ parcourt $[\![0, n - 1]\!]$ permet d'affirmer qu'il existe au moins un intervalle contenant au moins deux éléments de la famille $(\varepsilon_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ :

$$\exists (j_0, r, s) \in [\![0, n-1]\!] \times [\![0, n]\!]^2 \ : \ \varepsilon_r \in \left[\frac{j_0}{n}, \frac{j_0+1}{n}\right[ \text{ et } \varepsilon_s \in \left[\frac{j_0}{n}, \frac{j_0+1}{n}\right[ \text{ et } r \neq s \ .$$

   Par conséquent, $0 < |\varepsilon_r - \varepsilon_s| < \frac{1}{n}$ donc

$$\begin{aligned} 0 < |rx - \lfloor rx \rfloor - sx - \lfloor sx \rfloor| < \frac{1}{n} \quad &\Rightarrow \quad 0 < |(r-s)x - \lfloor rx \rfloor - \lfloor sx \rfloor| < \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow \quad 0 < \frac{\left|(r-s)\left(x - \dfrac{\lfloor rx \rfloor - \lfloor sx \rfloor}{r-s}\right)\right|}{|r-s|} < \frac{1}{n|r-s|} \quad \text{ce qui est autorisé car } r \neq s \\ &\Rightarrow \quad 0 < \frac{|r-s|\left|x - \dfrac{\lfloor rx \rfloor - \lfloor sx \rfloor}{r-s}\right|}{|r-s|} < \frac{1}{n|r-s|} \end{aligned}$$

d'où le résultat espéré en posant $p = \dfrac{(r-s)(\lfloor rx \rfloor - \lfloor sx \rfloor)}{|r-s|} \in \mathbb{Z}$ et $q = |r-s| \in \mathbb{N}^*$ :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq} \ .$$

De plus, par construction, $q = |r-s| \in [\![0, n]\!]$ donc $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{q}$ d'où

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq} \leqslant \frac{1}{q^2} \ .$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque.
Appliquons le résultat de la question précédente pour $x = \alpha$ et $n = k$ :

$$\exists (p_k, q_k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \ : \ \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{kq_k} \leqslant \frac{1}{q_k^2}$$

Ceci nous permet de construire les suites $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{Z})^{\mathbb{N}^*}$ et $(q_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2}$$

D'après la majoration

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{kq_k} \leqslant \frac{1}{k}$$

la suite $\left( \dfrac{p_k}{q_k} \right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la valeur $\alpha$ sans jamais l'atteindre puisque cette valeur est irrationnelle.
Soit $A \in \mathbb{R}_+$ fixé quelconque.
$\inf \left\{ \left| \alpha - \dfrac{p}{q} \right| \ \middle| \ p \in \mathbb{Z} \ , \ q \in [\![1, \lfloor A \rfloor]\!] \right\}$ est un plus petit élément (car il n'y a qu'un nombre fini de tels rationnels à distance inférieure ou égale à 1 de $\alpha$) strictement positif (car $\alpha \notin \mathbb{Q}$) noté $m_A$.
Puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{p_k}{q_k} = \alpha$,

$$\exists k_A \in \mathbb{N}^* \ : \ \forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ k \geqslant k_A \Rightarrow \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leqslant \frac{m_A}{2}$$

D'après la construction de $m_A$, on en déduit que,

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ k \geqslant k_A \Rightarrow q_k > \lfloor A \rfloor \Rightarrow q_k \geqslant A$$

Ainsi,

$$\lim_{k\to+\infty} q_k = +\infty \ .$$

3. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixés quelconque.
Appliquons le résultat de la question précédente :

$$\exists (p_k, q_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*} \ : \ \forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2} \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} q_k = +\infty \ .$$

On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ |\alpha q_k - p_k| < \frac{1}{q_k}$$

si bien que la propriété $\lim\limits_{k\to+\infty} q_k = +\infty$ garantit $\lim\limits_{k\to+\infty} |\alpha q_k - p_k| = 0$.
Par conséquent,

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}^* \ : \ \forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ k \geqslant k_0 \Rightarrow |\alpha q_k - p_k| \leqslant \varepsilon$$

Puisque $\delta_0 = |\alpha q_{k_0} - p_{k_0}| > 0$, posons $N = \left\lfloor \dfrac{a}{\delta_0} \right\rfloor$ de sorte que

$$N\delta_0 \leqslant a < (N+1)\delta_0$$

si bien que

$$|a - N\delta_0| \leqslant \delta_0 \leqslant \varepsilon$$

ce qui prouve le résultat puisque $N\delta_0 \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$.

### ▷ Corrigé de l'exercice 2.7

### ▷ Corrigé de l'exercice 2.8

1. Soit $x \in D$ fixé quelconque.
   Soient $(u, v) \in \mathbb{R}$ fixés quelconques tels que $u < v$.
   Par densité de $D$ dans $\mathbb{R}$, $]u, v[ \cap D \neq \emptyset$.
   ⋆ Si $x \notin ]u, v[$, $]u, v[ \cap D \neq \emptyset \Rightarrow ]u, v[ \cap (D \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.
   ⋆ Si $x \in ]u, v[$, alors $x < v$ si bien que par densité de $D$ dans $\mathbb{R}$, $]x, v[ \cap D \neq \emptyset$ or $x \notin ]x, v[$ donc $]x, v[ \cap (D \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ si bien que $]u, v[ \cap (D \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.
   Ainsi, pour tout $x \in D$, $D \setminus \{x\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Considérons la propriété de récurrence définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $\mathcal{P}(n)$ : « pour toute partie $F$ de cardinal $n$ d'une partie $Y$ de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$, $Y \setminus F$ est dense dans $\mathbb{R}$ »

   - $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après la question précédente.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
     Soit $Y$ une partie de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$ fixée quelconque.
     Soit $F = \{y_1, \dots, y_n, y_{n+1}\}$ une partie de cardinal $n+1$ de $Y$ fixée quelconque.
     Utilisons la véracité de la propriété de récurrence appliquée à la partie $Y$ dense dans $\mathbb{R}$ et à la partie finie $\{y_1, \dots, y_n\}$ de cardinal $n$ : $Y \setminus \{y_1, \dots, y_n\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
     Appliquons la question précénte à la partie $Y \setminus \{y_1, \dots, y_n\}$ dense dans $\mathbb{R}$ et à l'élément $\{y_{n+1}\}$ de cette partie pour en déduire que $Y \setminus \{y_1, \dots, y_n, y_{n+1}\}$ dense dans $\mathbb{R}$.
     Par conséquent $\mathcal{P}(n+1)$ est dense dans $\mathbb{R}$.

   Ainsi, pour toute partie finie $F$ de $D$, $D \setminus F$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Posons $X = D \cap [a, b]$.
   D'une part, $X = D \cap [a, b] \subset [a, b]$.
   D'autre part, soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ et $x \in [a, b]$ fixés quelconques.
   ⋆ Si $x \in [a, b[$, par densité de $D$ dans $\mathbb{R}$, $x < x + \min(\varepsilon, b - x)$ donc $D \cap ]x, x + \min(\varepsilon, b - x)[ \neq \emptyset$ donc

   $$\exists d \in D \ : \ x < d < x + \min(\varepsilon, b - x) \ .$$

   Alors $\begin{cases} x \geqslant a \Rightarrow d > x \geqslant a \\ \min(\varepsilon, b - x) \leqslant b - x \Rightarrow d < x + \min(\varepsilon, b - x) \leqslant x + b - x = b \end{cases}$ donc $d \in [a, b]$ or $d \in D$ donc $d \in X$.
   De plus, $\min(\varepsilon, b - x) \leqslant \varepsilon \Rightarrow x < d < x + \min(\varepsilon, b - x) \leqslant x + \varepsilon$ donc $d \in ]x, x + \varepsilon[$ donc $|x - d| < \varepsilon$.
   Ainsi, il existe $d \in X$ : $|x - d| < \varepsilon$.
   ⋆ Si $x = b$, $b - \min(\varepsilon, b - a) < b$ donc, par densité de $D$ dans $\mathbb{R}$, $D \cap ]b - \min(\varepsilon, b - a), b[ \neq \emptyset$ donc

   $$\exists d \in D \ : \ b - \min(\varepsilon, b - a) < d < b \ .$$

   Alors $\begin{cases} d < b \Rightarrow d \leqslant b \\ \min(\varepsilon, b - a) \leqslant b - a \Rightarrow d > b - \min(\varepsilon, b - a) \geqslant b - (b - a) = a \end{cases}$ donc $d \in [a, b]$ or $d \in D$ donc $d \in X$.
   De plus, $\min(\varepsilon, b - a) \leqslant \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon \leqslant b - \min(\varepsilon, b - a) < d < b$ donc $d \in ]b - \varepsilon, b[$ donc $|b - d| < \varepsilon$.
   Ainsi, il existe $d \in X$ : $|b - d| < \varepsilon$.
   Ainsi, $X$ est dense dans $[a, b]$.
4. *Application :* $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc, en appliquant le résultat de la question 2, $\mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En appliquant le résultat de la question 3 pour $[a, b] \leftarrow [0, 1]$ et $D \leftarrow \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$, $[0, 1] \cap (\mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}) = \mathbb{Q} \cap ]0, 1[$ est dense dans $[0, 1]$.

### ▷ Corrigé de l'exercice 2.9

### ▷ Corrigé de l'exercice 3.1

1. Soit $P \in \mathcal{P}$ fixé quelconque. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}$ , $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ .
   L'ensemble $\{|P(z)| \in \mathbb{R}_+ \mid z \in \mathbb{U}\}$ est
   - une partie de $\mathbb{R}_+$ par définition,
   - non vide car il contient $|P(1)|$,
   - majoré : soit $z \in \mathbb{U}$ fixé quelconque,

   $$|P(z)| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k||z|^k = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \ .$$

donc il admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
De plus, par définition de la borne supérieure, $\sup\{|P(z)| \in \mathbb{R}_+ \mid z \in \mathbb{U}\} \geqslant |P(1)| \geqslant 0$.
Par conséquent, $N$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,

2. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathcal{P}$ fixés quelconques.
Soit $z \in \mathbb{U}$ fixé quelconque.
$$|(\lambda.P)(z)| = |\lambda \times P(z)| = |\lambda||P(z)|$$
- $\forall z \in \mathbb{U}$,
$$|(\lambda.P)(z)| = |\lambda||P(z)| \leqslant |\lambda|N(P)$$
donc $|\lambda|N(P)$ majore $\{|(\lambda.P)(z)| \in \mathbb{R}_+ \mid z \in \mathbb{U}\}$ donc $N(\lambda.P) \leqslant |\lambda|N(P)$.
- $\forall z \in \mathbb{U}$,
$$|P(z)| = \frac{1}{|\lambda|}|(\lambda.P)(z)| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}N(\lambda.P)$$
donc $\frac{1}{|\lambda|}N(\lambda.P)$ majore $\{|P(z)| \in \mathbb{R}_+ \mid z \in \mathbb{U}\}$ donc $N(P) \leqslant \frac{1}{|\lambda|}N(\lambda.P)$.

Ainsi, $N(\lambda P) = |\lambda|N(P)$,

3. Soit $P \in \mathcal{P}$ fixé quelconque tel que $N(P) = 0$.
Alors $\sup\{|P(z)| \mid z \in \mathbb{U}\} = 0$ donc $\forall z \in \mathbb{U}$, $|P(z)| = 0$ donc $P$ admet une infinité de racines donc c'est le polynôme nul.
Ainsi, $N(P) = 0 \Rightarrow P = 0_{\mathcal{P}}$.

4. Soient $(P, Q) \in \mathcal{P}^2$ fixés quelconques.
Soit $z \in \mathbb{U}$ fixé quelconque.
$$|(P+Q)(z)| = |P(z) + Q(z)| \leqslant |P(z)| + |Q(z)| \leqslant N(P) + N(Q)$$
donc $N(P) + N(Q)$ majore $\{|(P+q)(z)| \mid z \in \mathbb{U}\}$ donc
$$N(P+Q) = \sup\{|(P+Q)(z)| \mid z \in \mathbb{U}\} \leqslant N(P) + N(Q)\ .$$

### ▷ Corrigé de l'exercice 3.2

### ▷ Corrigé de l'exercice 3.3

1. Montrer que $\preccurlyeq$ définit une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$.
2. La famille $(f_i)_{i\in I}$ est majorée donc il existe $M \in \mathbb{R}$ :
$$\forall i \in I\ ,\ \forall x \in E\ ,\ f(x) \leqslant M$$
Pour tout $x \in E$, notons $E_x = \{f_i(x) \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$.
L'ensemble $E_x$
   - ⋆ est une partie de $\mathbb{R}$,
   - ⋆ non vide car $I \neq \emptyset$ donc il existe $i_0 \in I$ donc $f_{i_0}(x) \in E_x$,
   - ⋆ majorée par $M$,

   donc elle admet une borne supérieure ce qui permet de définir l'application $f \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sup E_x \end{array} \right.$.
   - ⋆ $f$ est une application de $E$ dans $\mathbb{R}$,
   - ⋆ Soit $i \in I$ fixé quelconque.
$$\forall x \in E\ ,\ f_i(x) \in E_x \Rightarrow f_i(x) \leqslant \sup E_x = f(x)$$
donc $f_i \preccurlyeq f$.
Par conséquent, $f$ majore $\{f_i \mid i \in I\}$.
   - ⋆ Soit $g \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ fixée quelconque qui majore $\{f_i \mid i \in I\}$.
Soit $x \in E$ fixé quelconque.
$g$ majore $\{f_i \mid i \in I\}$ donc $\forall i \in I$, $f_i \preccurlyeq g$ donc
$$\forall i \in I\ ,\ f_i(x) \leqslant g(x)$$
donc $g(x)$ majore $E_x$ donc $f(x) = \sup E_x \leqslant g(x)$.
Par conséquent, $f \preccurlyeq g$.

Ainsi, $f$ est le plus petit des majorants de $\{f_i \mid i \in I\}$ donc $\{f_i \mid i \in I\}$ admet une borne supérieure qui est $f$.

| |
|---|
| Ainsi, toute partie non vide et majorée de $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ admet une borne supérieure. |

### ▷ Corrigé de l'exercice 3.4

### ▷ Corrigé de l'exercice 3.5

### ▷ Corrigé de l'exercice 3.6

L'ensemble $\mathcal{K}_f$ est $\left\{\begin{array}{l}\text{une partie de } \mathbb{R},\\ \text{non vide car } f\in\mathcal{L}(X,\mathbb{R}),\\ \text{minoré par } 0,\end{array}\right.$ donc $\mathcal{K}_f$ admet une borne inférieure $K_f=\inf\mathcal{K}_f\geqslant 0$.

Montrons que $K_f\in\mathcal{K}_f$.

- **Méthode 1 : preuve directe sans $\varepsilon$.**
  Soient $(x,y)\in X^2$ fixés quelconques.
  - ⋆ Si $x=y$, alors $|f(x)-f(y)|=0\leqslant 0=K_f|x-y|$.
  - ⋆ Si $x\neq y$, par définition de $\mathcal{K}_f$,
  $$\forall k\in\mathcal{K}_f\ ,\ |f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$$
  donc
  $$\forall k\in\mathcal{K}_f\ ,\ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\leqslant k$$
  donc $\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$ minore $\mathcal{K}_f$ donc $\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\leqslant\inf\mathcal{K}_f=K_f$
  Par cosnéquent, $|f(x)-f(y)|\leqslant K_f|x-y|$.
  On en déduit que $K_f\in\mathcal{K}_f$.
- **Méthode 2 : preuve par l'absurde.**
  Supposons que $K_f\notin\mathcal{K}_f$. Alors il existe $(x_0,y_0)\in X^2$ tels que $|f(x_0)-f(y_0)|>K_f|x_0-y_0|$.
  — Si $K_f\neq 0$, alors $x_0\neq y_0$ et $\dfrac{|f(x_0)-f(y_0)|}{|x_0-y_0|}>K_f$ si bien $K'_f=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{|f(x_0)-f(y_0)|}{|x_0-y_0|}+K_f\right)$ vérifie $\dfrac{|f(x_0)-f(y_0)|}{|x_0-y_0|}>K'_f$ donc $K'_f\notin\mathcal{K}_f$. Par ailleurs $K'_f>K_f$ si bien que la caractérisation de la borne inférieure appliquée pour $\varepsilon=K'_f-K_f>0$ assure l'existence de $k\in\mathcal{K}_f$ tel que $K_f\leqslant k<K'_f$ mais alors, puisque $k\in\mathcal{K}_f$, $K'_f\geqslant k$ est aussi une constante de lipschitz pour $f$ ce qui est une contradiction car $K'_f\notin\mathcal{K}_f$.
  Par conséquent, $K_f\in\mathcal{K}_f$.
  — Si $K_f=0$ ; Supposons que $f$ ne soit pas constante, alors il existe $(x_0,y_0)\in X^2$ tels que $|f(x_0)-f(y_0)|\neq|x_0-y_0|$ donc $\dfrac{|f(x_0)-f(y_0)|}{|x_0-y_0|}>0$ ; Par conséquent $\mathcal{K}_f\subset\left[\dfrac{|f(x_0)-f(y_0)|}{|x_0-y_0|},+\infty\right[$ si bien que $K_f\inf\mathcal{K}_f\geqslant\dfrac{|f(x_0)-f(y_0)|}{|x_0-y_0|}>0$ ce qui contredit $K_f=0$ ; par conséquent, si $K_f=0$, alors $f$ est constante donc elle est 0-lipschitzienne donc $K_f=0\in\mathcal{K}_f$.

Ainsi, $K_f\in\mathcal{K}_f$ donc $K_f=\min\mathcal{K}_f$.

### ▷ Corrigé de l'exercice 4.1

1. Si, $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ a\leqslant b+2\varepsilon$, alors $a<b$.
   Faux, si $a=b=1$, alors $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ 1\leqslant 1+2\varepsilon$ et $1=1$.
2. Si, $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall\eta\in\mathbb{R}_+^*,\ a\leqslant b+\varepsilon+\eta$, alors $a\leqslant b$.
   Vrai.
   Fixons $\eta\in\mathbb{R}_+^*$ quelconque. Alors $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ a-b-\eta\leqslant\varepsilon$, donc $a-b-\eta$ minore $\mathbb{R}_+^*$ donc $a-b-\eta\leqslant\inf\mathbb{R}_+^*=0$ donc $a-b\leqslant\eta$.
   Par conséquent, $\forall\eta\in\mathbb{R}_+^*,\ a-b\leqslant\eta$ donc $a-b$ minore $\mathbb{R}_+^*$ donc $a-b\leqslant\inf\mathbb{R}_+^*=0$ donc $a-b\leqslant 0$ donc $a\leqslant b$.
3. Soit $A\subset[0,1]$ non vide. Alors $\inf(A)=\sup([0,1]\setminus A)$.
   Faux. Si $A=\{0\}\cup\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, $\inf(A)=0$ et $[0,1]\setminus A=\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ si bien que $\sup([0,1]\setminus A)=\dfrac{1}{2}$.
4. Soit $A\subset[0,1]$ non vide et $a\in A$. Alors $\inf(A)=\sup([0,a]\setminus A)$.
   Faux. Si $A=\{0\}\cup\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ et $a=\dfrac{3}{4}$, $\inf(A)=0$ et $[0,a]\setminus A=\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ si bien que $\sup([0,a]\setminus A)=\dfrac{1}{2}$.
5. Toute partie non vide de $\mathbb{R}_+$ est bornée.
   Faux, $\mathbb{N}$ est une partie non vide et non bornée de $\mathbb{R}_+$.
6. Nier le fait qu'une partie $A$ non vide de $\mathbb{R}$ est bornée.
$$\begin{aligned}non(A\text{ bornée }) &\iff non(\exists M\in\mathbb{R}_+\ :\ \forall a\in A\ ,\ |a|\leqslant M)\\ &\iff \forall M\in\mathbb{R}_+\ :\ \exists a_M\in A\ ,\ |a_M|>M)\\ &\iff \forall M\in\mathbb{R}_+\ ,\ \exists a_M\in A\ :\ a_M>M\text{ ou }a_M<-M\ .\end{aligned}$$

7. La droite numérique achevée est un corps.
   Faux, la question ne se pose même pas car la droite numérique achevée définie dans le cours n'est munie d'aucune loi de composition interne puisque les prolongements choisis pour $+_{\mathbb{R}}$ et $\times_{\mathbb{R}}$ ne sont que partiels ! ($(-\infty)+(+\infty)$ et $0\times(+\infty)$ ne sont pas définis !)
8. La droite numérique achevée est un anneau.
   Faux, même argument que ci-dessus.
9. Toute partie non vide de la droite numérique achevée a un plus grand élément.
   Faux, $[0,1[$ est non vide n'a pas de plus grand élément.
10. Toute partie de la droite numérique achevée est minorée.
    Vrai. En effet, toute partie de la droite numérique achevée est minorée par $-\infty$.
11. La somme (le produit) de deux rationnels est un rationnel.
    Vrai.
12. La somme (le produit) de deux irrationnels est un irrationnel.
    Faux. Par exemple, $\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $-\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, or $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0\in\mathbb{Q}$ et $\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2\in\mathbb{Q}$.
13. $\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
    Faux. $\mathbb{R}\cap\left]\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right[\neq\emptyset$ et $\mathbb{Z}\cap\left]\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right[=\emptyset$.
    Rappel : la négation de $A\subset B$ est dense dans $B$ est :
    $$\exists(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ (B\cap]x,y[\neq\emptyset)\Rightarrow A\cap]x,y[\neq\emptyset\ .$$
14. $\left\{\dfrac{n}{2a+3b}\middle|\ (n,\ a,\ b)\in\mathbb{Z}^3,\ 2a+3b\neq 0\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
    Vrai. En fait $\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{n}{2a+3b}\middle|\ (n,\ a,\ b)\in\mathbb{Z}^3,\ 2a+3b\neq 0\right\}$. En effet, l'inclusion $\left\{\dfrac{n}{2a+3b}\middle|\ (n,\ a,\ b)\in\mathbb{Z}^3,\ 2a+3b\neq 0\right\}\subset\mathbb{Q}$ est immédiate.
    Réciproquement, soient $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ fixés quelconques. D'après le théorème de Bézout, puisque 2 et 3 sont premiers entre eux, il existe $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $2u+3v=1$ ($u=-1$, $v=1$ conviennent) si bien que
    $$\frac{p}{q}=\frac{p}{q(2u+3v)}=\frac{p}{2(qu)+3(vq)}$$
    donc $\dfrac{p}{q}\in\left\{\dfrac{n}{2a+3b}\middle|\ (n,\ a,\ b)\in\mathbb{Z}^3,\ 2a+3b\neq 0\right\}$
15. En disant qu'une partie $A$ de $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{Q}$ si pour tout $(x,\ y)\in\mathbb{Q}^2$ tels que $x<y$, il y a toujours un élément de $A$ qui est dans $]x,\ y[$, y-a-t-il des parties denses dans $\mathbb{Q}$ ? $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est-il dense dans $\mathbb{Q}$ ? et $\mathbb{Z}$ ?
    Les nombres dyadiques sont denses dans $\mathbb{Q}$.
    La question de la densité de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ ne se pose pas car $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ n'est pas une partie de $\mathbb{Q}$ !
    $\mathbb{Z}$ est bien une partie de $\mathbb{Q}$ mais n'est pas dense dans $\mathbb{Q}$ car $]0,1[$ rencontre $\mathbb{Q}$ sans rencontrer $\mathbb{Z}$.
16. Une fonction $f:X\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est minorée s'il existe $m\in\mathbb{R}_-$ tel que $\forall x\in X,\ f(x)\geqslant m$.
    Vrai.
17. Les applications constantes de $X\subset\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont croissantes, décroissantes, majorées et minorées.
    Vrai.
18. Les applications croissantes et décroissantes de $\emptyset\subsetneq X\subset\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications constantes.
    Vrai. Soit $f$ une application croissante et décroissante de $X$ dans $\mathbb{R}$.
    Supposons qu'elle prenne au moins deux valeurs $b$ et $b'$ distinctes. Soient $a$ et $a'$ deux antécédents respectifs. Supposons que $a\leqslant a'$, alors par croissance $b\leqslant b'$ et par décroissance $b\geqslant b'$ donc $b=b'$. On obtient le même résultat si $a>a'$. Or $b=b'$ est en contradiction avec l'hypothèse $b\neq b'$ donc $f(X)$ contient au plus une valeur et comme il en contient au moins (car $X\neq\emptyset$), $f(X)$ est un singleton donc $f$ est constante.
19. Les applications majorées et minorées de $X\subset\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications constantes.
    Faux. Pour $X=\mathbb{R}$, la fonction sin est majorée (par 1) et minorée (par $-1$) sans être constante.
20. Il n'existe pas d'application croissante strictement décroissante.
    Vrai.
21. Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement croissante et $g$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ croissante. Alors $g\circ f$ (resp $f\circ g$) est strictement croissante.
    Faux. Prenons $f=\exp$ strictement croissante et $g$ constante, alors $g\circ f$ est constante. De même, $f\circ g$ est constante.

22. Quelle est la négation de "$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée" ?

$$\begin{array}{rcl} non(f \text{ est bornée }) & \iff & non(\exists M \in \mathbb{R}_+ \ : \ \forall x \in X \ \ |f(x)| \leqslant M) \\ & \iff & \forall M \in \mathbb{R}_+ \ , \ \exists x_0 \in X \ : \ |f(x_0)| > M \\ & \iff & \forall M \in \mathbb{R}_+ \ , \ \exists x_0 \in X \ : \ f(x_0) > M \text{ ou } f(x_0) < -M \end{array}$$

23. Quelle est la négation de "$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est majorée" ?

$$\begin{array}{rcl} non(f \text{ est majorée }) & \iff & non(\exists M \in \mathbb{R}_+ \ : \ \forall x \in X \ \ f(x) \leqslant M) \\ & \iff & \forall M \in \mathbb{R}_+ \ , \ \exists x_0 \in X \ : \ f(x_0) > M \end{array}$$

24. Quelle est la négation de "$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est égale à $g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$" ?

$$\begin{array}{rcl} non(f = g) & \iff & non(\forall x \in X \ \ f(x) = g(x)) \\ & \iff & \exists x_0 \in X \ : \ f(x_0) \neq g(x_0) \\ & \iff & \exists x_0 \in X \ : \ f(x_0) > g(x_0) \text{ ou } f(x_0) < g(x_0) \end{array}$$

25. Quelle est la négation de "pour toute $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe $g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f$ et $g$ coïncident sur $Y \subset X$" ?

$$\begin{array}{rcl} & & non(\forall f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \ , \ \exists g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \ : \ \forall y \in Y \ \ f(y) = g(y)) \\ \iff & & \exists f_0 \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \ : \ \forall g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \ , \ \exists y_0 \in Y \ : \ f_0(y_0) \neq g(y_0) \end{array}$$

26. Si une fonction $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire est dérivable sur $X$, alors sa fonction dérivée est impaire.
Faux. Si $x \longmapsto f(x)$ est impaire et dérivable sur $X$, en dérivant $\forall x \in X$, $f(x) = -f(-x)$, on obtient $\forall x \in X$, $f'(x) = -(-f'(-x)) = f'(-x)$ donc $f'$ est paire.

27. Si une fonction $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique est dérivable sur $X$, alors sa fonction dérivée est périodique.
Vrai. Il suffit de dériver $\forall x \in X$, $f(x + T) = f(x)$, ce qui donne $\forall x \in X$, $f'(x + T) = f'(x)$ donc si $f$ est $T$-périodique, alors $f'$ est aussi $T$-périodique.

28. Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire est continue sur $\mathbb{R}$, alors ses primitives sont des fonctions paires.
Vrai. Soit $f$ une fonction continue et impaire sur $\mathbb{R}$. L'ensemble de ses primitives est :

$$\left\{ F_\lambda \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(u) \ du + \lambda \end{array} \ \middle| \ \lambda \in \mathbb{R} \right\} .$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$F_\lambda(-x) = \int_0^{-x} f(u) \ du + \lambda = -\int_{-x}^0 f(u) \ du + \lambda = \int_0^x f(u) \ du + \lambda = F_\lambda(x) \ ,$$

l'avant dernière égalité reposant sur une interprétation graphique de l'intégrale (qui apparaît comme l'aire algébrique entre le graphe de $f$ et l'axe des abscisses) et le fait que le graphe de $f$ est symétrique par rapport à l'origine. Par conséquent $F_\lambda$ est paire.

29. Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire est continue sur $\mathbb{R}$, alors ses primitives sont des fonctions impaires.
Faux. $x \longmapsto x^2$ est paire sur $\mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{3}x^3 + 2$ est une de ses primitives et n'est pas impaire.

30. Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire est continue sur $\mathbb{R}$, alors elle possède une unique primitive impaire, c'est la primitive qui ...
Parmi toutes les primitives d'une fonction paire, il en existe une unique qui est impaire, c'est celle qui s'annule en 0.
Soit $f$ une fonction continue et paire sur $\mathbb{R}$. L'ensemble de ses primitives est :

$$\left\{ F_\lambda \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(u) \ du + \lambda \end{array} \ \middle| \ \lambda \in \mathbb{R} \right\} .$$

Si la primitive $F_\lambda$ est impaire, alors $F_\lambda(0) = 0$ donc $\lambda = 0$ si bien qu'il y a au plus une primitive impaire qui est $F_0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_0(-x) = \int_0^{-x} f(u) \ du = -\int_{-x}^0 f(u) \ du = \int_0^x f(u) \ du = F_0(x)$$

, l'avant dernière égalité reposant sur une interprétation graphique de l'intégrale (qui apparaît comme l'aire algébrique entre le graphe de $f$ et l'axe des abscisses) et le fait que le graphe de $f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Par conséquent $F_0$ est la seule primitive de $f$ impaire.

31. Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique est continue sur $\mathbb{R}$, alors ses primitives sont des fonctions périodiques.
Faux. La fonction $x \longmapsto \cos x + 1$ est $2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$ et continue et $x \longmapsto \sin x + x$ est une de ses primitives et elle n'est pas périodique. Plus précisément, les primitives de $x \longmapsto \cos x + 1$ sur $\mathbb{R}$ sont $\left\{ \begin{array}{ccc|c} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ x & \longmapsto & \sin x + x + \lambda & \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$ et aucune n'est périodique !
En fait on peut prouver que, si une fonction périodique admet au moins une primitive périodique, alors toutes ses primitives sont périodique et sa valeur moyenne sur une période est nulle.
Réciproquement, si $f$ est une fonction périodique dont la valeur moyenne sur une période est nulle, alors toutes ses primitives sont périodiques.

32. Une fonction 1-périodique de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ est une application constante.
Vrai.