Matrices

1 Calcul matriciel. Puissances de matrices, inversibilité.

▷ **Exercice 1.1.** Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer $A^3 - A$ et en déduire une expression polynomiale annulant A. A est-elle inversible et si oui quel est son inverse ?

▷ **Exercice 1.2.**
Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

▷ **Exercice 1.3.** Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

▷ **Exercice 1.4.** Notons J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1

1. Déterminer le rang et le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à J.
2. Calculer J^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Calculer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(J + \lambda I_n)^k$.
4. En déduire l'expression des puissances de $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

▷ **Exercice 1.5.** Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $N = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Calculer N^k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire A^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

▷ **Exercice 1.6.** Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

1. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X$.
2. En déduire le calcul de A^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

▷ **Exercice 1.7.** Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0_n$.

1. Montrer que la somme (resp. le produit) de deux matrices nilpotentes $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ qui commutent est une matrice nilpotente.
2. Montrer que, si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $I_n + \lambda N$ est inversible.
   En déduire que $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ est inversible et préciser son inverse.

▷ **Exercice 1.8.** Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ fixée quelconque.

1. Calculer $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2$.
2. En déduire une CNS sur $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$ pour que $A \in GL_2(\mathbb{K})$.
3. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ sont-elles inversibles et si oui, préciser leurs inverse.

▷ **Exercice 1.9.** **Oral X-2009.** Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente non nulle telle qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB^2 - B^2A = B$. Montrer que l'indice de nilpotence p_B de B est impair. On rappelle que $p_B = \min\{p \in \mathbb{N}^* \mid B^p = 0\}$.

2 Structures algébriques sur les espaces de matrices.

2.1 Sous-anneaux, sous-groupes, sous-algèbres de matrices.

▷ **Exercice 2.1.** Montrer que $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} x+y & 3y \\ -y & x-y \end{bmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +\cdot)$, un sous-anneau de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$, une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +\cdot, \times)$, puis que c'est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.
On posera $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

▷ **Exercice 2.2.** Posons $G = \left\{ M(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$

Soit $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & M(x) \end{array} \right.$.

1. Comparer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\Phi(x+y)$ et $\Phi(x) \times \Phi(y)$.
2. Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_3(\mathbb{R}), \times)$ isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

▷ **Exercice 2.3.** Soit $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{bmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on donnera une base et la dimension.
2. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer les éléments inversibles de $\mathcal{E}$.
4. Déterminer les diviseurs de zéro de $\mathcal{E}$ (est-ce nécessaire de distinguer diviseur de zéro à gauche et diviseur de zéro à droite ?).
   On rappelle que dans un anneau $(\mathbb{A}, +, \times)$ de neutre additif $0_{\mathbb{A}}$,
   — $a \in \mathbb{A} \setminus \{0_A\}$ est un *diviseur de zéro à gauche* s'il existe $b \in A \setminus \{0_A\}$ tel que $a \times b = 0_A$,
   — $a \in \mathbb{A} \setminus \{0_A\}$ est un *diviseur de zéro à droite* s'il existe $b \in A \setminus \{0_A\}$ tel que $b \times a = 0_A$.
   Il est évident que si l'anneau $(\mathbb{A}, +, \times)$ est commutatif, les deux notions de diviseur de zéro à droite et à gauche coïncident et donnent la notion de *diviseur de zéro*.
   On rappelle également (voir exercice non évident plus loin) que, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, une matrice est un diviseur de zéro à droite si et seulement si c'est un diviseur de zéro à gauche.

2.2 Matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

▷ **Exercice 2.4.** Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que $I_n + AB$ est inversible. Montrer que $(I_n + BA) \in GL_n(\mathbb{K})$.

▷ **Exercice 2.5.** **Inversibilité des matrices à "diagonale dominante".**

1. Soit $(A_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) telle que
$$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\},\ |A_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |A_{i,j}| \quad , \quad \text{ce qui se lit “}A\text{ est à diagonale dominante”.}$$
   Montrer que cette matrice est inversible.
2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & -10 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? et $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 6 \\ -3 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -10 \end{pmatrix}$? Donner une condition suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que $M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -3 & 2 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ soit inversible.

3 Algèbre linéaire sur les espaces de matrices.

▷ **Exercice 3.1.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_0, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$ non tous nuls tels que
$$\lambda_0.I_n + \lambda_1.A + \lambda_2.A^2 + \ldots + \lambda_p.A^p = 0_n\ .$$

▷ **Exercice 3.2.** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ fixée. Considérons $\Phi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MA \end{array} \right.$.

1. Montrer que Φ_A est une application linéaire et donner sa matrice relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer $\mathrm{Tr}(\Phi_A)$.
3. Donner une CNS sur $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour que $\Phi \in \mathcal{GL}_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

▷ **Exercice 3.3. À propos de la trace d'une matrice carrée.**

Considérons l'application $\mathrm{Tr}\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{i,i}\end{array}\right.$.

1. Montrer que Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. En déduire que l'ensemble des matrices de trace nulle, $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on précisera la dimension et une base (que l'on explicitera pour $n = 2$ et $n = 3$).

▷ **Exercice 3.4. Base duale de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.**

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^*$ (espace dual de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$) ? Expliciter la base duale de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$.
2. Exprimer dans la base duale de la base canonique les formes linéaires Tr et $\varphi_A : \left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}(AM)\end{array}\right.$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est fixée.
3. En déduire l'expression de $\varphi_{E^{i,j}}$ et montrer que $\Phi : \left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A & \mapsto & \left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}(AM)\end{array}\right.\end{array}\right.$ est un isomorphisme.

▷ **Exercice 3.5.**

1. (a) Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM)$. Montrer que $A = B$ (on pourra tester les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
   (b) Soit $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ (forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ , \ \varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM) \ .$$
2. (a) Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
   (b) Calculer, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i, j, k, l) \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Tr}(AE^{i,j}E^{k,l})$.
   (c) Soit $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\varphi(AB) = \varphi(BA)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ , \ \varphi(M) = \lambda.\mathrm{Tr}(M) \ .$$

4 Interprétation matricielle des endomorphismes.

4.1 Application linéaire associé à une matrice

▷ **Exercice 4.1.** Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme a.

4.2 Matrice représentant une application linéaire.

▷ **Exercice 4.2.** Dans tout l'exercice, on traitera le cas $n = 4$ avant de traiter le cas général $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Donner la matrice, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, $u : P(X) \mapsto P(X + 1)$.
   (b) Montrer que c'est un automorphisme et préciser sa matrice inverse (on pourra chercher la matrice de l'endomorphisme réciproque car ici, u s'inverse plus rapidement que sa matrice !!).
2. Expliciter la décomposition d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans la base de Hilbert $(T_0, \dots, T_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ où,
$$T_0(X) = 1 \quad , \quad \forall k \in [\![1, n]\!] \ , \ T_k(X) = \frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(X - i)}{k!} = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!} \ .$$
3. En déduire la base duale $(T_0^*, \dots, T_n^*)$ de la base de Hilbert.

▷ **Exercice 4.3.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f$. On note $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathrm{mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
2. Quel lien y a-t-il entre $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathrm{mat}(f, \mathcal{B}_c)$?

▷ **Exercice 4.4.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tel qu'il existe $(u, v) \in (\mathbb{R}^4)^2$ vérifiant

$$u \neq 0_{\mathbb{R}^4} \ , \ v \neq 0_{\mathbb{R}^4} \ , \ f(u) = v \ , \ f(v) = -u \ , \ \mathrm{rg}(f) = 2$$

On note A la matrice de f relativement à la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
2. Montrer que A est semblable à $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
3. Calculer la dimension du commutant $\mathcal{C}(M) = \{G \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mid MG = GM\}$ de M.
   En déduire la dimension du commutant $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4) \mid f \circ g = g \circ f\}$ de f.

4.3 Changements de base.

▷ **Exercice 4.5.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. On note $\mathcal{B}'$ la base $(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1)$.

1. Relier $A = \mathrm{mat}(u, \mathcal{B})$ et $A' = \mathrm{mat}(u, \mathcal{B}')$ avec la formule de changement de base. On commencera par le cas $n = 3$.
2. En supposant que $n = 2$ et que tous les coefficients diagonaux de A sont nuls, que dire de A et A' ?

▷ **Exercice 4.6.** Montrer que les matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ sont sembables (i.e. représentent le même endormorphisme lu dans les mêmes bases au départ et à l'arrivée mais relativement à des bases différentes. On pourra étudier l'équation d'inconnue $P \in GL_2(\mathbb{R})$ $A = P^{-1}BP$ en remarquant que $A = P^{-1}BP \iff PA = BP \iff PA - BP = 0$.

▷ **Exercice 4.7.**

1. Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^2)$ et (e_1, e_2) une base de $\mathbb{K}^2$ telle que $A = \mathrm{mat}(u, (e_1, e_2)) = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Exprimer en fonction de $\lambda \in \mathbb{K}^*$, a, b et c les matrices $\mathrm{mat}(u, (e_2, e_1))$, $\mathrm{mat}(u, (\lambda.e_1, \lambda.e_2))$ et $\mathrm{mat}(u, (e_1, \lambda.e_2))$.
2. Les matrices $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont-elles dans la même classe de similitude pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$?
3. L'ensemble $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{K}^* \right\}$ est-il une classe de similitude ?

▷ **Exercice 4.8.** Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $u^k = 0$. Montrer qu'il existe une base de E relativement à laquelle la matrice de u est strictement triangulaire supérieure.

▷ **Exercice 4.9.** Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

1. Résoudre, en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ le système linéaire d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $(A - \lambda.I_3)X = 0_{3,1}$.
2. Déterminer les droites vectorielles stabilisées par u. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ relativement à laquelle la matrice de u est diagonale.
3. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 = A$. On pourra montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à M commute avec u et qu'il stabilise les droites stables de u.

▷ **Exercice 4.10.** Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$, $\varphi : P(X) \mapsto P(X) + P'(X)$.

1. Donner la matrice de l'endomorphisme de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. En déduire le rang de l'endomorphisme. Existe-t-il un endomorphisme ψ de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_3[X]}$? l'expliciter dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Calculer $\varphi^{-1}(X^3 + X + 2)$.
3. En observant le comportement de φ^2, φ^3,... trouver une expression polynômiale annulant φ et retrouver les résultats ci-dessus.
4. Donner l'expression de la matrice de φ dans la base $\{1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3\}$ d'une part en appliquant la formule du changement de base et d'autre part en calculant directement la matrice cherchée.

5 Rang d'une famille de vecteurs. Rang d'une application linéaire.

▷ **Exercice 5.1. Rang d'un produit de matrices**
Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Montrer que
$$\text{rg}(AB) \leqslant \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$$

▷ **Exercice 5.2. Rang d'un projecteur**

1. Rappeler les définitions et les propriétés des sous-espaces vectoriels qui caractérisent un projecteur vectoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
2. Montrer que le rang d'un projecteur d'un espace de dimension finie est égal à sa trace.
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$. u est semblable à v s'il existe $\varphi \in \mathcal{GL}(E)$ telle que $u = \varphi^{-1} \circ v \circ \varphi$.
   (a) Montrer que la relation binaire « être semblable » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{GL}(E)$.
   (b) Montrer que deux projecteurs d'un espace de dimension finie sont semblables si et seulement si ils ont le même rang.

▷ **Exercice 5.3. Matrices de rang 1**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $(C,C') \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2$ telle que $A = C \times {}^tC'$.
2. Montrer que, si on note a le réel ${}^tC' \times C$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A^{p+1} = a^p A$.
3. Prouver que $a = \text{Tr}A$.
4. En déduire une CNS pour qu'une matrice de rang 1 soit canoniquement associée à une projection vectorielle dont on déterminera l'image et le noyau en fonction des coefficients des matrices C et C'.
5. Montrer que $A + I_n$ est inversible si et seulement si $a \neq -1$ et préciser son inverse. On pourra chercher l'inverse sous la forme $I_n + \lambda A$.

▷ **Exercice 5.4.** Calculer le rang des matrices suivantes et leur inverse s'il y a lieu
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

▷ **Exercice 5.5.** Soit $(A_1, A_2, \dots, A_k) \in GL_n(\mathbb{K})^k$ une famille de matrices stable par multiplication. On note $(a_i)_{i\in\{1,\dots,k\}}$ les automorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés à ces matrices.

1. Montrer que la famille constitue un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que l'application linéaire $p = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i$ est un projecteur vectoriel. En déduire que la trace de $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} A_i$ est un multiple de k.
3. Montrer que $\text{Tr}(p) = \dim_{\mathbb{K}}\Big\{\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} \text{Ker}(a_i - id)\Big\}$, ce qui s'écrit aussi
$$\text{Tr}(S) = k \times \dim_{\mathbb{K}}\Big\{X \in \mathbb{K}^n \mid \forall i \in \{1,\dots,k\},\ A_iX = X\Big\}.$$

▷ **Exercice 5.6.** (Voir exercice 2.3)

1. Montrer que, dans l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$, une matrice M est un diviseur de zéro à droite si et seulement si c'est un diviseur de zéro à gauche. On pourra par exemple utiliser la décomposition PJ_rQ de M.
2. On se place dans l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ où E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles. On considère l'endomorphisme décalage à gauche. Montrer que c'est un diviseur de zéro à gauche mais pas à droite.

▷ **Exercice 5.7. Application de la décomposition PJ_rQ.**
Soit f une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ non constante telle que $\forall (M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $f(M_1M_2) = f(M_1)f(M_2)$.

1. f est-elle un morphisme de groupes ?
2. Montrer que $f(I_n) = 1$ et que $f(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = 0$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$: $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Montrer que $f(A) = 0$.
4. Montrer que $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \iff f(M) \neq 0$.

L'indispensable : complétez, démontrez ou infirmez les assertions suivantes.

▷ **Exercice 5.8.**

1. Quels sont les inverses, s'ils existent, des matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$?
2. Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Calculer A^2 et en déduire une expression polynômiale annulant A. A est-elle inversible et si oui quel est son inverse ?
3. L'ensemble des matrices $\mathcal{E} = \left\{ A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid \exists (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 : A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix} \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? un sous-anneau ? Quels sont les éléments inversibles dans cet ensemble de cet ensemble ?
4. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que pour tout $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, $(AB)^2 = 0$, alors $A = 0$.
5. Si A et B sont deux matrices carrées de même taille telles que $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.
6. Donner une base de $\{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$ (comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel puis comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel).
7. Que peut-on dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Tr}({}^t AA) = 0$?
8. Trouver deux matrices $(A_2, B_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ telles que $A_2B_2 = 0$ et $B_2A_2 \neq 0$. En déduire des matrices $(A_p, B_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$ $(p \geqslant 2)$ telles que $A_pB_p = 0$ et $B_pA_p \neq 0$.
9. Le produit de deux matrices symétriques est une matrice symétrique si et seulement si elles commutent.
10. Il existe $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_{2n}$.
11. La trace d'un projecteur vectoriel est égale à son rang.
12. La somme de deux matrices inversibles est inversible.
13. **Vu à l'oral de l'X.** Quelle est, sans calcul ou presque, la matrice inverse de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$? la réponse est dans un exemple du cours.
14. Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent et telles que $A^3 = 7I_n + B^3$, alors $A - B$ est inversible. Que se passe-t-il si la relation précédente est changée en $A^3 = 7I_n - B^3$?
15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^3 = 0$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(I_n + A + A^2)^k$.
16. Résoudre, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $M^2 = I_2$.

Correction des exercices

▷ Corrigé de l'exercice 1.1

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Le Calcul de $A^3 - A$ donne $4.I_3$.

On en déduit que $A\left(A^2 - I_3\right) = 4.I_3$ donc, en multipliant avec la LCE par $\dfrac{1}{4}$ et en utilisant le bon comportement de la LCE "$\cdot$" vis-à-vis de la LCI $\times$ (car $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre)

$$A \times \left(\frac{1}{4}.A^2 - \frac{1}{4}.I_3\right) = I_3 \ .$$

De plus, la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{R}[A]$ des polynômes en A est commutative donc

$$\left(\frac{1}{4}.A^2 - \frac{1}{4}.I_3\right) \times A = I_3$$

si bien que $\boxed{A \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R}) \text{ et } A^{-1} = \frac{1}{4}.A^2 - \frac{1}{4}.I_3.}$

▷ Corrigé de l'exercice 1.2

Le calcul de A^2 donne $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Le calcul de A^3 donne $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ si bien que $A^3 = A^2$.

À partir de cela, un récurrence immédiate permet de montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2 \Rightarrow A^k = A^2$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \mathbb{N},\ A^k = \begin{cases} I_n & \text{si } k = 0 \text{ (par convention)}, \\ A & \text{si } k = 1, \\ A^2 & \text{si } k \geqslant 2. \end{cases}}$$

▷ Corrigé de l'exercice 1.3

▷ Corrigé de l'exercice 1.4

1.
2. Un calcul immédiat permet de montrer que $J^2 = n.J$ ce qui permet de prouver par récurrence que
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ J^k = n^{k-1}.J$$
3. La $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées n'est pas commutative, toutefois I_n étant l'élḿent neutre pour le produit matriciel, $\lambda.I_n$ commute avec J ce qui permt d'appliquer la formule du binôme de Newton pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(J + \lambda.I_n)^k &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} J^j (\lambda.I_n)^{k-j} \quad \text{avec la convention } J^0 = I_n \\
&= \binom{k}{0} J^0 (\lambda.I_n)^{k-0} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} J^j (\lambda.I_n)^{k-j} \quad \text{car la formule } J^k = n^{k-1}.J \text{ ne s'applique que pour } k \geqslant 1 \\
&= \binom{k}{0} \lambda^k.I_n + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} n^{j-1} \lambda^{k-j}.J \\
&= \lambda^k.I_n + \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} n^j \lambda^{k-j}\right).J \\
&= \lambda^k.I_n + \left(\frac{(n+\lambda)^k - \lambda^k}{n}\right).J
\end{aligned} \tag{1}$$

Par exemple,

— pour $k=0$, par convention $(J+\lambda.I_n)^0 = I_n$ et la formule donne

$$(J+\lambda.I_n)^0 = \lambda^0.I_n + \left(\frac{(n+\lambda)^0-\lambda^0}{n}\right).J = I_n + 0.J = I_n$$

ce qui correspond bien !

— pour $k=1$, formule donne

$$(J+\lambda.I_n)^1 = \lambda.I_n + \left(\frac{(n+\lambda)-\lambda}{n}\right).J = \lambda.I_n + J$$

ce qui correspond bien !

— pour $k=2$, $(J+\lambda.I_n)^2 = J^2 + 2\lambda.J + \lambda^2 I_n = (n+2\lambda).J + \lambda^2 I_n$ et la formule donne

$$(J+\lambda.I_n)^2 = \lambda^2.I_n + \left(\frac{(n+\lambda)^2-\lambda^2}{n}\right).J = \lambda^2.I_n + \left(\frac{n^2+2n\lambda}{n}\right).J$$

ce qui correspond bien !

4. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} = 2.J + 3.I_3$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} A^k &= 2^k\left(J + \frac{3}{2}I_2\right)^k \\ &= 2^k\left(\frac{3^k}{2^k}.I_3 + \frac{1}{3}\left(\frac{9^k}{2^k} - \frac{3^k}{2^k}\right).J\right) \\ &= 3^k.I_3 + \frac{1}{3}\left(9^k - 3^k\right).J \\ &= 3^k.I_3 + 3^{k-1}(3^k-1).J \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } A^0 = I_3 \text{ et pour tout } k\in\mathbb{N}^*,\ A^k = 3^k.I_3 + 3^{k-1}(3^k-1).J}$$

▷ Corrigé de l'exercice 1.5

1. Un calcul explicite donne $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $N^3 = 0_3$.

$$\boxed{\text{Par conséquent, } N = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et pour tout } k\in\mathbb{N}^*,\ k\geqslant 3 \Rightarrow N^k = 0_3.}$$

2. Observons d'une part que $A = 2I_3 + N$ et d'autre part que $2I_3$ et N commutent ce qui permet d'utiliser la formule du binôme de Newton bien que la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ne soit pas commutative : pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} A^k &= (N+2I_3)^k \\ &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}N^j \times 2^{k-j}I_3 \\ &= \sum_{j=0}^{\min(k,2)}\binom{k}{j}N^j \times 2^{k-j}I_3 \\ &= \begin{cases} 2I_3 + N & \text{si } k=1, \\ 2^kI_3 + k2^{k-1}N + \dfrac{k(k-1)}{2}2^{k-2}N^2 & \text{si } k\geqslant 2. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } A^k = \begin{cases} I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } k=0, \\ 2I_3 + N = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \text{si } k=1, \\ 2^kI_3 + k2^{k-1}N + \dfrac{k(k-1)}{2}2^{k-2}N^2 = \begin{bmatrix} 2^k & k2^{k+1} & 3k(k+1)2^{k-1} \\ 0 & 2^k & 3k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} & \text{si } k\geqslant 2. \end{cases}}$$

▷ **Corrigé de l'exercice 1.6** Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

1. D'après le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\exists!(Q_k, a_k, b_k, c_k) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}^3 \;:\; X^k = (X^3 - 3X^2 + 2X)Q(X) + \underbrace{a_k X^2 + b_k X + c_k}_{= R_k(X) \in \mathbb{R}_2(X)} \tag{2}$$

Observons que $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$.
En particularisant en les valeurs 0, 1 et 2 qui sont **les racines du diviseur** la relation (2), on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \;,\; \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & & & c_k & = & 0 \\ a_k & + & b_k & + & c_k & = & 1 \\ 4a_k & + & 2b_k & + & c_k & = & 2^k \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} & & & c_k = & 0 \\ a_k & + & b_k & = & 1 \\ 4a_k & + & 2b_k & = & 2^k \end{array} \right.$$

Or le système linéaire 2×2 $\left\{ \begin{array}{ccccc} a_k & + & b_k & = & 1 \\ 4a_k & + & 2b_k & = & 2^k \end{array} \right.$ a pour déterminant $2 - 4 = -2$ donc il admet une unique solution donnée par les formules de Cramer :

$$a_k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2^k & 2 \end{vmatrix}}{-2} = 2^{k-1} - 1 \quad \text{et} \quad b_k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2^n \end{vmatrix}}{-2} = 2 - 2^{k-1}$$

Par ailleurs, pour $k = 0$, le reste est 1 donc $a_0 = b_0 = 0$ et $c_0 = 1$

$$\boxed{\text{Ainsi, } R_0 = 1 \text{ et, pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ R_k = (2^{k-1} - 1)X^2 + (2 - 2^{k-1})X.}$$

2. On vérifie facilement par un calcul explicite que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0_3$ ce qui permet de prendre l'image des identités polynomiales de la question précédente

$$\forall k \in \mathbb{N} \;,\; X^k = ((X^3 - 3X^2 + 2X))Q_k(X) + a_k X^2 + b_k X + c_k$$

par le morphisme d'algèbre $\Phi_A \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[A] \\ P & \mapsto & P(A) \end{array} \right.$ ce qui donne

$$\boxed{A^0 = I_3 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = (2^{k-1} - 1)A^2 + (2 - 2^{k-1})A.}$$

▷ **Corrigé de l'exercice 1.7** Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0_n$.

1. Montrer que la somme (resp. le produit) de deux matrices nilpotentes $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ qui commutent est une matrice nilpotente.
2. Montrer que, si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $I_n + \lambda N$ est inversible.
Observons que

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -2\,(I_3 + N) \text{ où } N = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un calcul explicite montre que $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $N^3 = 0_3$ si bien que N est nilpotente et nous avons prouvé dans ce cas que $I_n + N$ est inversible d'inverse

$$(I_3 + N)^{-1} = I_3 - N + N^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par conéquent, puisque $-2 \in \mathbb{K}^*$ et $I_3 + N \in GL_3(\mathbb{K})$, $A = -2(I_3 + N)$ est inversible

$$A^{-1} = (-2)^{-1}(I_3 + N)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{8} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } A \in GL_2(\mathbb{R}) \text{ et } A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{8} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.}$$

▷ Corrigé de l'exercice 1.8

1. $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0_{2,2}$.
2. Montrons que $A \in GL_2(\mathbb{K}) \iff ad - bc \neq 0_{\mathbb{K}}$.
   - Supposons que $ad - bc \neq 0_{\mathbb{K}}$.
     Alors la relation $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0_{2,2}$ donne
     $$A\left(-\frac{1}{ad-bc}(A - (a+d).I_2)\right) = I_2$$
     or $\mathbb{K}_2[A]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative donc $A \in GL_2(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = -\frac{1}{ad-bc}(A - (a+d).I_2)$.
     Bonus : nous pouvons expliciter les coefficients de A^{-1} en fonction de ceux de A :
     $$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(-\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (a+d)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$
   - Supposons que $A \in GL_2(\mathbb{K})$.
     Raisonnons par l'absurde en supposant que $ad - bc = 0$.
     La relation de la question 1 donne, après multiplication par A^{-1},
     $$A - (a+d)I_2 = 0_{2,2}$$
     si bien que
     $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix}$$
     donc
     $$a = a+d \quad \text{et} \quad b = 0 \quad \text{et} \quad c = 0 \quad \text{et} \quad d = a+d$$
     donc $a = b = c = d = 0$. Ainsi, $A = 0_{2,2}$ donc $\forall B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $AB = 0_{2,2} \neq I_2$, ce qui contredit $A \in GL_2(\mathbb{K})$.
     Par conséquent l'assertion $ad - bc = 0$ est fausse.
3. - $B \notin GL_2(\mathbb{C})$ car $1 \times (-2) - (-2) \times 1 = 0$.
   - $C \in GL_2(\mathbb{C})$ car $(-1)^2 - (-2) \times 3 \neq 0$ et $C^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

▷ Corrigé de l'exercice 1.9

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente non nulle telle qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB^2 - B^2A = B$. Montrer que l'indice de nilpotence p_B de B est impair. On rappelle que $p_B = \min\{p \in \mathbb{N}^* \mid B^p = 0\}$.
L'idée : montrons que si B^{2p+2} s'annule, alors B^{2p+1} s'annule aussi, et pour cela, il faudrait exprimer B^{2p+1} en fonction de B^{2p+2}. Essayons pour les petites valeurs :

- Par hypothèse, $B = AB^2 - B^2A$.
- $$\begin{aligned} B^3 &= B^2 \times B \\ &= B^2(AB^2 - B^2A) \\ &= \underbrace{B^2A}_{= AB^2 - B} B^2 - B^4A \\ &= AB^4 - B^3 - B^4A \end{aligned}$$

  donc $2B^3 = AB^4 - B^4A$.

- $$\begin{aligned} B^5 &= B^2 \times B^3 \\ &= \frac{1}{2}B^2(AB^4 - B^4A) \\ &= \frac{1}{2}\left(\underbrace{B^2A}_{= AB^2 - B} \quad B^4 - B^6A\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(AB^6 - B^5 - B^6A\right) \end{aligned}$$

  donc $3B^5 = AB^6 - B^6A$.

D'où l'idée de prouver par récurrence la conjecture :

$$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ (k+1)B^{2k+1} = AB^{2k+2} - B^{2k+2}A$$

Soit $\mathcal{P}(\cdot)$ la propriété définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(k)\ :\ \text{“}(k+1)B^{2k+1} = AB^{2k+2} - B^{2k+2}A\text{ “}$$

- Par hypothèse, $B = AB^2 - B^2A$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

  $$\begin{aligned} B^{2k+3} &= B^2 \times B^{2k+1} \\ &= \frac{1}{k+1}B^2(AB^{2k+2} - B^{2k+2}A) \quad \text{car } \mathcal{P}(k) \text{ est vraie} \\ &= \frac{1}{k+1}\left(\underbrace{B^2A}_{= AB^2 - B} \quad B^{2k+2} - B^{2k+4}A\right) \\ &= \frac{1}{k+1}\left(AB^{2k+4} - B^{2k+3} - B^{2k+4}A\right) \end{aligned}$$

  si bien que $(k+2)B^{2k+3} = AB^{2k+4} - B^{2k+4}A$.

  Ainsi $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Raisonnons par l'absurde en supposant que l'indice de nilpotence de B noté $p_B \geqslant 1$ est pair. Alors

⋆ d'une part $\exists q \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_B = 2q$

⋆ d'autre part $B^{p_B - 1} \neq 0$,

donc, en utilisant la formule reliant B^{2q-1} et B^{2q},

$$0 \neq qB^{2q-1} = AB^{2q} - B^{2q}A = A\underbrace{B^{p_B}}_{=0} - \underbrace{B^{p_B}}_{=0}A = 0$$

ce qui est une contradiction.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'indice de nilpotence de } B \text{ est impair.}}$$

▷ **Corrigé de l'exercice 2.1**

1. **Structure de sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**
2. **Structure de sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**
3. **Structure de sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**
4. **Structure de corps.**
5. **Isomorphisme avec $\mathbb{C}$.**

   Considérons l'application $\psi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \to & \mathbb{C} \\ xI_2 + yS & \mapsto & x + iy\sqrt{2} \end{array}\right.$ Montrons que ψ est un isomorphisme de corps, ce qui signifie que c'est un morphisme d'anneau entre deux corps :

   ⋆ ψ est un morphisme pour les lois $+$.

   Soient $(M, M') \in \mathcal{E}^2$ fixées quelconques.

   $\exists (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4\ :\ M = xI_2 + yS$ et $M' = x'I_2 + y'S$.

   $$\begin{aligned} \psi(M + M') &= \psi(xI_2 + yS + x'I_2 + y'S) \\ &= \psi((x + x')I_2 + (y + y')S) \\ &= (x + x') + i(y + y')\sqrt{2} \\ &= x + iy\sqrt{2} + x' + iy'\sqrt{2} \\ &= \psi(M) + \psi(M') \end{aligned}$$

- ⋆ ψ est un morphisme pour les lois $\times$.
  Soient $(M, M') \in \mathcal{E}^2$ fixées quelconques.
  $\exists (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4 \ : \ M = xI_2 + yS$ et $M' = x'I_2 + y'S$.

$$\begin{array}{rcl} \psi(M \times M') & = & \psi((xI_2 + yS) \times (x'I_2 + y'S)) \\ & = & \psi((xx' - 2yy')I_2 + (xy' + yx')S) \\ & = & (xx' - 2yy') + i(xy' + yx')\sqrt{2} \end{array}$$

  Par ailleurs,

$$\psi(M) \times \psi(M') = \left(x + iy\sqrt{2}\right)\left(x' + iy'\sqrt{2}\right) = (xx' - 2yy') + i\sqrt{2}(xy' + yx')$$

  d'où $\psi(MM') = \psi(M) \times \psi(M')$.
- ⋆ L'image du neutre multiplicatif de $\mathcal{E}$ par ψ est le neutre multiplicatif de $\mathbb{C}$:

$$\psi(I_2) = \psi(1.I_2 + 0.S) = 1 + 0.i\sqrt{2} = 1$$

▷ Corrigé de l'exercice 2.2

▷ Corrigé de l'exercice 2.3

Soit $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{bmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1. Observons que par définition,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E} & = & \left\{ \begin{bmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{bmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ & = & \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ & = & \operatorname{Vect}\{I_2, M\} \quad \text{où } M \text{ est la matrice } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \end{array}$$

   donc $\mathcal{E}$ est **le sous-espace vectoriel engendré par les matrices I_2 et M.**

   $\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

   De plus l'interprétation ci-dessus permet d'affirmer que $\mathcal{E}$ est engendré par la famille (I_2, M).
   Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ fixés quelconques tels que $\lambda.I_2 + \mu.M = 0_{2,2}$.
   Alors $\begin{bmatrix} \lambda+\mu & \mu \\ -\mu & \lambda-\mu \end{bmatrix} = 0_{2,2}$ donc $\left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda & + & \mu & = & 0 \\ & & \mu & = & 0 \end{array} \right.$ si bien que $\lambda = \mu = 0$ d'où la liberté de la famille (I_2, M).

   $\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{E} \text{ est de dimension 2 et } (I_2, M) \text{ est une base de } \mathcal{E}.}$

2.
   - $\mathcal{E} \neq \emptyset$ car $I_2 \in \mathcal{E}$.
   - $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un anneau.
   - $\mathcal{E}$ est stable pour la loi $+$ car c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   - $I_2 \in \mathcal{E}$.
   - Soient $(A, B) \in \mathcal{E}^2$ fixées quelconques.
     $\exists (x_A, x_B, y_A, y_B) \in \mathbb{R}^4$: $A = x_A.I_2 + y_A.M$ et $A = x_B.I_2 + y_B.M$.
     Calculons, en utilisant que $M^2 = 0_{2,2}$,

$$A \times B = (x_A.I_2 + y_A.) \times (x_B.I_2 + y_B.M) = x_A x_B.I_2 + (x_A y_B + x_B y_A).M$$

     On en déduit
     - ⋆ que $A \times B \in \mathcal{E}$ donc $\mathcal{E}$ est stable pour la loi $\times$,
     - ⋆ que $A \times B = B \times A$ par symétrie des rôles joués par x_A et x_B, y_A et y_B donc la loi $\times$ est commutative en restriction à $\mathcal{E}$.

   $\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{E} \text{ est un sous-anneau commutatif de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

3. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixés quelconques.

$$\begin{array}{rcl} x.I_2+y.M\text{est inversible} & \iff & \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2 \ : \ (x.I_2+y.M)(a.I_2+b.M)=I_2 \\ & \iff & \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2 \ : \ xa.I_2+(ya+bx).M=I_2 \\ & \iff & \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2 \ : \ \left\{\begin{array}{ccccc} xa & & & = & 1 \\ ya & + & xb & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{car } (I_2,M) \text{ est une famille libre} \\ & \iff & x\neq 0 \end{array}$$

Pour la dernière équivalence, il est indispensable de lire correctement les équivalences précédentes : la CNS cherchée est une CNS d'existence d'au moins une solution au système $\left\{\begin{array}{ccccc} xa & & & = & 1 \\ ya & + & xb & = & 0 \end{array}\right.$ d'inconnues (a,b) et de paramètres (x,y). Or si $x=0$, il n'y a aucune solution (car la première équation devient $0=1$) et si $x\neq 0$, on trouve une unique valeur pour a et en reportant dans la seconde équation, on trouve toujours au moins une valeur de b qui convient.

$$\boxed{\text{Ainsi, les éléments inversibles de } \mathcal{E} \text{ sont } \{x.I_2+y.M | x\in\mathbb{R}^*, y\in\mathbb{R}\} \text{ c'est à dire } \mathcal{E}\setminus \mathrm{Vect}\{M\}.}$$

4. L'anneau $\mathcal{E}$ étant commutatif, il n'est pas ici nécessaire de distinguer les diviseurs de zéro à gauche et les diviseurs de zéro à droite.
Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ fixés quelconques.

$$\begin{array}{rcl} x.I_2+y.M\text{est un diviseur de zéro} & \iff & \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \ : \ (x.I_2+y.M)(a.I_2+b.M)=0_{2,2} \\ & \iff & \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \ : \ xa.I_2+(ya+bx).M=0_2 \\ & \iff & \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \ : \ \left\{\begin{array}{ccccc} xa & & & = & 0 \\ ya & + & xb & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{car } (I_2,M) \text{ est une fam} \end{array}$$

⋆ si $x\neq 0$,
$$\left\{\begin{array}{ccccc} xa & & & = & 0 \\ ya & + & xb & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} a & & & = & 0 \\ & & xb & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} a & & & = & 0 \\ & & b & = & 0 \end{array}\right.$$
or $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ donc le système n'admet aucune solution,

⋆ si $x=0$, alors $y\neq 0$ car $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,
$$\left\{\begin{array}{ccccc} xa & & & = & 0 \\ ya & + & xb & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} 0 & & & = & 0 \\ ya & & & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} & & 0 & = & 0 \\ a & & & = & 0 \end{array}\right.$$
donc le système admet au moins $(0,1)$ comme solution (en fait l'ensemble des solutions est $\{(0,t)|t\in\mathbb{R}^*\}$).

Par conséquent,
$$x.I_2+y.M \text{ est un diviseur de zéro} \iff x=0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, les diviseurs de zéro de } \mathcal{E} \text{ sont } \{y.M|y\in\mathbb{R}^*\}}.$$

▷ Corrigé de l'exercice 2.4

- Supposons que I_n+BA est inversible.
Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ fixé quelconque tel que $(I_n+AB)X=0_{n,1}$.
Alors $X+ABX=0_{n,1}$ si bien qu'en multipliant par B à gauche,
$$BX+BABX=0_{n,1}$$
d'où, en factorisant par BX à droite (possible par associativité du produit matriciel),
$$(I_n+BA)(BX)=0_{n,1}$$
or I_n+BA est inversible donc $BX=0$.
En reprenant l'équation de départ,
$$X=-A\underbrace{BX}_{=0_{n,1}}=0_{n,1}$$
Par conséquent, la matrice carrée I_n+AB vérifie
$$\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ , \ \Big[(I_n+AB)X=0_{n,1}\Rightarrow X=0_{n,1}\Big]$$
donc $(I_n+AB)\in GL_n(\mathbb{K})$.

- Supposons que $I_n + AB$ est inversible. En échangeant les rôles joués par A et B on montre comme ci-dessus que $I_n + BA$ est inversible.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (I_n + AB) \in GL_n(\mathbb{K}) \iff (I_n + BA) \in GL_n(\mathbb{K}).}$$

▷ Corrigé de l'exercice 2.5

1. Raisonnons par l'absurde en supposant que A n'est pas inversible.
   Alors, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0_{n,1}$ et $X \neq 0_{n,1}$.
   La $i^{\text{ième}}$ ligne de l'égalité $AX = 0$ est
   $$\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} X_{k,1} = 0_{n,1}$$
   soit
   $$\forall i \in [\![1,n]\!]\ ,\ -A_{i,i}X_{i,1} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} A_{i,k}X_{k,1}$$
   Puisque $X \neq 0_{n,1}$, posons $M = \max\{|X_{k,1}| \mid k \in [\![1,n]\!]\}$. M est bien défini car $\{|X_{k,1}| \mid k \in [\![1,n]\!]\}$ est une partie
   ⋆ non vide,
   ⋆ finie,
   ⋆ d'un ensemble totalement ordonné (à savoir $(\mathbb{R}, \leqslant)$).
   De plus, par définition du plus grand élément d'une partie,
   $$\exists i_0 \in [\![1,n]\!]\ ,\ M = |X_{i_0,1}|$$
   et puisque $X \neq 0_{n,1}$, $M = |X_{i_0,1}| > 0$.
   La $i_0^{\text{ième}}$ ligne de l'égalité $AX = 0$ devient, en prenant le module
   $$|A_{i_0,i_0}| \times |X_{i_0,1}| = \left|\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} A_{i_0,k}X_{k,1}\right|$$
   d'où, par inégalité triangulaire,
   $$|A_{i_0,i_0}| \times |X_{i_0,1}| \leqslant \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |A_{i_0,k}||X_{k,1}|$$
   soit, après multiplication par $|X_{i_0,1}|^{-1}$,
   $$|A_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |A_{i_0,k}| \frac{|X_{k,1}|}{|X_{i_0,1}|} \leqslant \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |A_{i_0,k}|$$
   si bien que
   $$\exists i_0 \in [\![1,n]\!]\ ,\ |A_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |A_{i_0,k}|$$
   ce qui contredit l'hypothèse de "diagonale dominante".

2. - $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & -10 \end{pmatrix}$ est à diagonale dominante donc $A \in GL_3(\mathbb{R})$.
   - $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 6 \\ -3 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -10 \end{pmatrix}$ n'est pas à diagonale dominante car $|B_{1,1}| \leqslant |B_{1,2}| + |B_{1,3}|$ ce qui ne permet pas de conclure a priori.
     Toutefois, ${}^tB$ est à diagonale dominante donc ${}^tB \in GL_3(\mathbb{R})$ donc $B \in GL_3(\mathbb{R})$.
   - En utilisant le critère "être à diagonale dominante", si $\left\{\begin{array}{lcl} |\lambda| & > & 3+2 \\ |\lambda| & > & 2+2 \\ |\lambda| & > & 1+0 \end{array}\right.$ alors $M_\lambda \in GL_3(\mathbb{R})$. Par conséquent une condition suffisante d'inversibilité de M_λ est $|\lambda| > 5$.

Mais ce résultat peut être amélioré ! en effet, en utilisant le critère “être à diagonale dominante” pour ${}^tM_\lambda$, si $\left\{\begin{array}{lcl} |\lambda| & > & 2+1 \\ |\lambda| & > & 3+0 \\ |\lambda| & > & 2+2 \end{array}\right.$ alors ${}^tM_\lambda \in GL_3(\mathbb{R})$ doncune condition suffisante d'inversibilité de ${}^tM_\lambda$ est $|\lambda| > 4$
Or $M_\lambda \in GL_3(\mathbb{R}) \iff {}^tM_\lambda \in GL_3(\mathbb{R})$ donc la condition suffisante la moins restrictive (parmi les deux trouvées ci-dessus) garantissant l'inversibilité de M_λ est $\boxed{|\lambda| > 4 \Rightarrow M_\lambda \in GL_3(\mathbb{R}).}$

▷ Corrigé de l'exercice 3.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
La famille $\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$ est de cardinal n^2+1 dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension n^2 donc elle est liée. Par conséquent,

$$\exists(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1} \setminus \{0_{\mathbb{K}^{n^2+1}}\} \ : \ \lambda_0.I_n + \lambda_1.A + \lambda_2.A^2 + \ldots + \lambda_p.A^{n^2} = 0_n \ .$$

▷ Corrigé de l'exercice 3.2

1. Soient $(M, M') \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$
   Notons $\mathcal{B}_c = (E^{1,1}, E^{1,2}, E^{2,1}, E^{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Notons $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ la matrice A.
   Observons que
   - $\star$ $u(E^{1,1}) = E^{1,1} \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = aE^{1,1} + bE^{1,2}$,
   - $\star$ $u(E^{1,2}) = E^{1,2} \times A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = cE^{1,1} + dE^{1,2}$,
   - $\star$ $u(E^{2,1}) = E^{2,1} \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} = aE^{2,1} + bE^{2,2}$,
   - $\star$ $u(E^{2,2}) = E^{2,2} \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = cE^{2,1} + dE^{2,2}$.

   Par conséquent, $\mathrm{mat}(\Phi_A, \mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^tA & 0_2 \\ 0_2 & {}^tA \end{bmatrix}$
2. Montrons que $A \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R}) \iff \Phi_A \in \mathcal{GL}_2(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.
   - Supposons que $A \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$. Explicitons $\Phi_A \circ \Phi_{A^{-1}}$.
     Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ fixée quelconque.
     $$\Phi_A \circ \Phi_{A^{-1}}(M) = \Phi_A(MA^{-1}) = (MA^{-1})A = M \underbrace{AA^{-1}}_{=I_n} = M$$
     Par conséquent, $\Phi_{A^{-1}}$ vérifie $\Phi_A \circ \Phi_{A^{-1}} = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ donc Φ_A est surjectif or il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie ($\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace de dimension finie) donc $\Phi_A \in \mathcal{GL}_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ (on peut aussi utiliser que pour un endomorphisme d'un espace de dimension finie, l'existence d'un inverse à droite ou à gauche suffit à conclure à l'inversibilité).
   - Supposons que $\Phi_A \in \mathcal{GL}_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.
     Alors, il existe $\psi \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\Phi_A \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. En particulier,
     $$\Phi_A \circ \psi(I_2) = I_2 \Rightarrow \psi(I_2)A = I_2$$
     mais l'égalité $\psi(I_2)A = I_2$ implique l'inversibilité de A à gauche qui est équivalente à l'inversibilité de A. Par conséquent, $A \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$.

   Autre méthode. Raisonner sur la matrice par blocs de Φ_A dans la base canonique en observant qu'elle vaut $\begin{bmatrix} {}^tA & 0_2 \\ 0_2 & {}^tA \end{bmatrix}$ et justifier qu'une telle matrice diagonale par blocs est inversible si et seulement si tous ses blocs diagonaux sont inversibles.

   $\boxed{\text{Ainsi, } \Phi_A \in \mathcal{GL}_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) \iff A \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R}).}$

▷ Corrigé de l'exercice 3.3

1. $\boxed{\text{Ainsi, Tr est une forme linéaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$

2. $\boxed{\text{Ainsi, } \left((E^{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,n]\!]\\ i\neq j}}, (E^{i,i}-E^{n,n})_{i\in[\![1,n-1]\!]} \right) \text{ est une base de } \mathcal{E}.}$

▷ Corrigé de l'exercice 3.4

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^*$ (espace dual de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$) ? Expliciter la base duale de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$.
2. Exprimer dans la base duale de la base canonique les formes linéaires Tr et $\varphi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \text{Tr}(AM) \end{array} \right.$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est fixée.
3. En déduire l'expression de $\varphi_{E^{i,j}}$ et montrer que $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \text{Tr}(AM) \end{array} \right. \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

▷ Corrigé de l'exercice 3.5

1. (a) Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Tr}(AM) = \text{Tr}(BM)$. Montrer que $A = B$ (on pourra tester les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
   (b) Soit $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ (forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ , \ \varphi(M) = \text{Tr}(AM) \ .$$
2. (a) Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$,
$$\begin{aligned}
\text{Tr}(AB) &= \sum_{k=1}^{n} [AB]_{k,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{k,i} B_{i,k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (A_{k,i} B_{i,k}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (B_{i,k} A_{k,i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} B_{i,k} A_{k,i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [BA]_{i,i} \\
&= \text{Tr}(BA)
\end{aligned}$$
   (b) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i, j, k, l) \in [\![1, n]\!]$.
   Observons que
$$E^{i,j} \times E^{k,l} = \delta_{j,k} E^{i,l}$$
   si bien que
$$\text{Tr}(AE^{i,j}E^{k,l}) = \delta_{j,k}\text{Tr}(AE^{i,l}) = \delta_{j,k} A_{l,i} \ .$$
   (c) Soit $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\varphi(AB) = \varphi(BA)$.
   D'après la question 1, $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ donc
$$\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ : \ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ , \ \varphi(M) = \text{Tr}(AM) \ .$$
   ⋆ Soient $(r, s) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $r \neq s$. En utilisant la question précédente pour $(i, j) = (s, s)$ et $(k, l) = (s, r)$,
$$A_{r,s} = \text{Tr}(AE^{s,s}E^{s,r}) = \varphi(E^{s,s}E^{s,r})$$
   or, par hypothèse, $\varphi(E^{s,s}E^{s,r}) = \varphi(E^{s,r}E^{s,s})$ donc en utilisant le calcul de la question précédente pour $(i, j) = (s, r)$ et $(k, l) = (s, s)$,
$$A_{r,s} = \varphi(E^{s,r}E^{s,s}) = \text{Tr}(AE^{s,r}E^{s,s}) = \underbrace{\delta_{r,s}}_{\substack{=0 \\ \text{car } r\neq s}} A_{s,s} = 0 \ .$$
   Par conséquent, A est une matrice diagonale.

- ⋆ Soit $r \in [\![1,n]\!]$ fixé quelconque. En utilisant la question précédente pour $(i,j)=(1,s)$ et $(k,l)=(s,1)$,
$$A_{1,1}=\mathrm{Tr}(AE^{1,s}E^{s,1})=\varphi(E^{1,s}E^{s,1})$$
or, par hypothèse, $\varphi(E^{1,s}E^{s,1})=\varphi(E^{s,1}E^{1,s})$ donc en utilisant le calcul de la question précédente pour $(i,j)=(s,1)$ et $(k,l)=(1,s)$,
$$A_{1,1}=\varphi(E^{s,1}E^{1,s})=\mathrm{Tr}(AE^{s,1}E^{1,s})=\delta_{1,1}A_{s,s}=A_{s,s}\ .$$

Par conséquent, A possède tous ses coefficients diagonaux égaux.

Ainsi, $\exists\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $A=\lambda.I_n$ si bien que
$$\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ ,\ \varphi(M)=\lambda.\mathrm{Tr}(M)\ .$$

▷ **Corrigé de l'exercice 4.1** Déterminons le noyau de a :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}a &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0\\ & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0\\ x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0\\ & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0\\ & - & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0\\ & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0\\ & & & & 0 & = & 0\end{array}\right.\\
&\iff \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}6t\\3t\\t\end{pmatrix}\ \middle|\ t\in\mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}a=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}6\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Déterminons l'image de a :

- Méthode 1 : résolution d'un système :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\in\mathrm{Im}a &\iff \exists(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & & & = & y_1\\ & - & x_2 & + & 3x_3 & = & y_2\\ x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & = & y_3\end{array}\right.\\
&\iff \exists(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & & & = & y_1\\ & - & x_2 & + & 3x_3 & = & y_2\\ & - & 2x_2 & + & 6x_3 & = & y_3-y_1\end{array}\right.\\
&\iff \exists(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & & & = & y_1\\ & - & x_2 & + & 3x_3 & = & y_2\\ & & & & & = & y_3-y_1-2y_2\end{array}\right.\\
&\iff y_3-y_1-2y_2=0\\
&\iff \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}u\\v\\u+2v\end{pmatrix}\ \middle|\ (u,v)\in\mathbb{R}^2\right\}
\end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathrm{Im}a=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

- Méthode 2 : puisque le noyau est de dimension 1, d'après le théorème du rang, l'image est de dimension 2 donc il suffit de trouver deux vecteurs libres de l'image. Or les vecteurs colonnes de A sont eds vecteurs de l'image de a puisque, par définition de a, ce sont les images respectives des trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Par exemple, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}$ sont libres donc $\mathrm{Im}a=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}\right\}$. De même, $\mathrm{Im}a=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\-4\end{pmatrix}\right\}=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\right\}$

▷ **Corrigé de l'exercice 4.2**

1. • Montrons que $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_n[X])$.
   • Posons $\mathcal{B}_{c,\mathbb{R}_n[X]} = (X^0, X^1, \ldots, X^n)$ et $M = \mathrm{mat}(u, \mathcal{B}_{c,\mathbb{K}_n[X]})$.
   ⋆ Cas particulier $n = 4$:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   ⋆ Cas général.
   La matrice M est de taille $(n+1, n+1)$ et pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $M_{i,j}$ est la coordonnée de $u(X^{j-1})$ selon X^{i-1} (les décalages $i-1$ et $j-1$ viennent du fait que les lignes et colonnes sont indicées à partir de 1 tandis que les éléments de la base $\mathcal{B}_{c,\mathbb{R}_n[X]}$ ont des puissances qui commencent à 0 : $X^0, X^1, \ldots, X^n$)
   Or

$$u(X^{j-1}) = (X+1)^{j-1} = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} X^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{j-1}{k} X^k}_{\substack{\text{en rappelant que} \\ \binom{j-1}{k} = 0 \text{ si } k > j-1}}$$

   donc

$$M_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$$

   • Il est immédiat de vérifier que l'endomorphisme $v \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X-1) \end{array} \right.$ satisfait $v \circ u = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ si bien que u est **injectif**, or c'est un **endomorphisme d'un espace de dimension finie** donc c'est un **automorphisme** de $\mathbb{R}_n[X]$ et $u^{-1} = v$.
   De plus, $u \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}_n[X])$ donc d'une part $M = \mathrm{mat}(u, \mathcal{B}_{c,\mathbb{R}_n[X]}) \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ et d'autre part

$$M^{-1} = \mathrm{mat}(u^{-1}, \mathcal{B}_{c,\mathbb{R}_n[X]}) = \mathrm{mat}(v, \mathcal{B}_{c,\mathbb{R}_n[X]}) \ .$$

   ⋆ Cas particulier $n = 4$.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

   ⋆ Cas général.
   La matrice M^{-1} est de taille $(n+1, n+1)$ et pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $[M^{-1}]_{i,j}$ est la coordonnée de $v(X^{j-1})$ selon X^{i-1} (les décalages $i-1$ et $j-1$ viennent du fait que les lignes et colonnes sont indicées à partir de 1 tandis que les éléments de la base $\mathcal{B}_{c,\mathbb{R}_n[X]}$ ont des puissances qui commencent à 0 : $X^0, X^1, \ldots, X^n$)
   Or

$$v(X^{j-1}) = (X-1)^{j-1} = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} (-1)^{j-1-k} X^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{j-1-k} \binom{j-1}{k} X^k}_{\substack{\text{en rappelant que} \\ \binom{j-1}{k} = 0 \text{ si } k > j-1}}$$

   donc

$$[M^{-1}]_{i,j} = (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} = \underbrace{(-1)^{j+i} \binom{j-1}{i-1}}_{(-1)^{j-i} = (-1)^{i+j}}$$

2. ⋆ Cas particulier $n = 4$.
   Rappelons que

$$T_0(X) = 1 \ , \ T_1(X) = X \ , \ T_2(X) = \frac{X(X-1)}{2} \ , \ T_3(X) = \frac{X(X-1)(X-2)}{6} \ , \ T_4(X) = \frac{X(X-1)(X-3)}{24} \ .$$

   La famille $(T_0, T_1, T_2, T_3, T_4)$ est constituée de polynômes non nuls de degrés étagés donc elle est libre. De plus c'est une famille de $\mathbb{R}_4[X]$ qui est de dimension 5 donc elle est libre de cardinal maximal donc $(T_0, T_1, T_2, T_3, T_4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$ fixé quelconque.

$$\exists(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^5 \ , \ P = \lambda_0 T_0 + \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \lambda_3 T_3 + \lambda_4 T_4 \quad (*)$$

En particularisant pour $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$, $X = 3$ et $X = 4$, (i.e. en prenant l'image de $(*)$ par les formes linéaires d'évaluation en 0, 1, 2, 3 et 4) on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} \lambda_0 & + & & & & & & & & = & P(0) \\ \lambda_0 & + & \lambda_1 & & & & & & & = & P(1) \\ \lambda_0 & + & 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & & & = & P(2) \\ \lambda_0 & + & 3\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & P(3) \\ \lambda_0 & + & 4\lambda_1 & + & 6\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & P(4) \end{array} \right.$$

dont la version matricielle est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \\ P(3) \\ P(4) \end{bmatrix}$$

soit

$$^tM \times \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \\ P(3) \\ P(4) \end{bmatrix}$$

donc, en utilisant que $({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$,

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = {}^t(M^{-1}) \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \\ P(3) \\ P(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \\ P(3) \\ P(4) \end{bmatrix}$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} \lambda_0 & = & P(0) & & & & & & & & \\ \lambda_1 & = & -P(0) & + & P(1) & & & & & & \\ \lambda_2 & = & P(0) & - & 2P(1) & + & P(2) & & & & \\ \lambda_3 & = & -P(0) & + & 3P(1) & - & 3P(2) & + & P(3) & & \\ \lambda_4 & = & P(0) & - & 4P(1) & + & 6P(2) & - & 4P(3) & + & P(4) \end{array} \right.$$

⋆ Cas général.
La famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est constituée de polynômes non nuls de degrés étagés donc elle est libre. De plus c'est une famille de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$ donc elle est libre de cardinal maximal donc $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ fixé quelconque.

$$\exists(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ , \ P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k T_k \quad (**)$$

En remarquant que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$T_k(p) = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} = \binom{p}{k} \ ,$$

l'image de $(**)$ par les formes linéaires d'évaluation en 0, 1, …, n, on obtient le système

$$^tM \times \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n) \end{bmatrix}$$

qui est équivalent à

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = ({}^tM)^{-1} \times \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n) \end{bmatrix} = {}^t(M^{-1}) \times \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n) \end{bmatrix}$$

Par conséquent, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\begin{array}{rcl}\lambda_k & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} [{}^t(M^{-1})]_{k+1,i} \times P(i-1) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} [M^{-1}]_{i,k+1} \times P(i-1) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+k+1} \binom{k}{i-1} \times P(i-1) \\ & = & \displaystyle\sum_{s=0}^{n} (-1)^{k+s} \binom{k}{s} \times P(s) \quad \text{en posant } s = i-1, \\ & = & \displaystyle\sum_{s=0}^{k} (-1)^{k+s} \binom{k}{s} \times P(s) \quad \text{car } \binom{k}{s} = 0 \text{ pour } s > k.\end{array}$$

3. L'expression de la base duale $(T_0^*, T_1^*, T_2^*, T_3^*, T_4^*)$ se lie sur les coordonnées d'un polynôme P dans cette base de Hilbert :
   - ⋆ Cas particulier $n = 4$.

$$\begin{array}{rcl}\forall P \in \mathbb{R}_4[X] \ , \ T_0^*(P) & = & P(0) \\ T_1^*(P) & = & -P(0) + P(1) \\ T_2^*(P) & = & P(0) - 2P(1) + P(2) \\ T_3^*(P) & = & -P(0) + 3P(1) - 3P(2) + P(3) \\ T_4^*(P) & = & P(0) - 4P(1) + 6P(2) - 4P(3) + P(4)\end{array}$$

   - ⋆ Cas général.
     Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$;

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \ , \ T_k^*(P) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^{k+s} \binom{k}{s} \times P(s) \ .$$

▷ Corrigé de l'exercice 4.3

1. Observons la structure de la solution d'un exercice de ce type :
   - **Analyse des propriétés de la base $\mathcal{B} = (e_1', e_2')$ cherchée.**
     Puisque $\text{mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f(e_1') = 0_{\mathbb{R}^2}$ et $f(e_2') = e_1'$ donc e_1' est un vecteur du noyau de f tandis que e_2' est un antécédent de e_1'.
   - **Construction d'une famille qui est candidate pour être une base $\mathcal{B}$ qui convient.**
     Puisque $\mathbb{R}^2$ est un espace de dimension 2, le théorème du rang donne

$$2 = \text{rg} f + \text{dimKer} f \ ,$$

     or $\text{Im} f = \text{Ker} f$ donc

$$\text{dimIm} f = \text{dimKer} f = 1$$

     Choisisons u un vecteur non nul de $\text{Im} f$ (qui est donc aussi un vecteur de $\text{Ker} f$).
     Par définition de $\text{Im} f$, $\exists v \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(v) = u$.
     Notre famille candidate est (u, v).
   - **Montrons que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.**
     Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ fixés quelconques tels que

$$\lambda.u + \mu.v = 0_{\mathbb{R}^2}$$

     En prenant l'image de cette égalité par f, puisque $u \in \text{Ker} f$,

$$\lambda.0_{\mathbb{R}^2} + \mu.f(v) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

     donc $\mu.u = 0_{\mathbb{R}^2}$, or $u \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ donc $\mu = 0$.
     En reportant dans l'égalité de départ, $\lambda.u = 0_{\mathbb{R}^2}$, or $u \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ donc $\lambda = 0$.
     Ainsi, $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ donc (u, v) est une famille libre, or elle est de cardinal maximal dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2 donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

- **Calcul de** $\mathrm{mat}(f,(u,v))$**.**
  Puisque $u \in \mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f$, $f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}$ et, par construction, $f(v) = u$ si bien que
  $$\mathrm{mat}(f,(u,v)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Posons $P = \mathcal{P}(\mathcal{B}_c,(u,v))$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base (u,v).
D'après la formule de changement de base,
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{mat}(f,\mathcal{B}) = P^{-1}\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}_c)P$$

▷ Corrigé de l'exercice 4.4

1. Observons que $u = f(-v) \in \mathrm{Im} f$ et $v = f(u) \in \mathrm{Im} f$ donc (u,v) est une famille de deux vecteurs de $\mathrm{Im} f$.
Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ fixés quelconques tels que
$$\alpha.u + \beta.v = 0_{\mathbb{R}^4} \tag{3}$$
En prenant l'image de cette équation par f, on obtient
$$-\beta.u + \alpha.v = 0_{\mathbb{R}^4} \tag{4}$$
si bien qu'en calculant $\alpha(3) - \beta(4)$, on obtient
$$(\alpha^2 + \beta^2).u = 0_{\mathbb{R}^4}$$
or $u \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ donc $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ donc $\alpha = \beta = 0$.
Ainsi, (u,v) est une famille libre de $\mathrm{Im} f$, or son cardinal est égal à la dimension de $\mathrm{Im} f$ donc c'est une base de $\mathrm{Im} f$.
   - ⋆ L'inclusion $\{0_{\mathbb{R}^4}\} \subseteq \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$ est immédiate.
   - ⋆ Soit $x \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$ fixé quelconque.
     Puisque (u,v) est une base de $\mathrm{Im} f$, $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que
     $$x = \alpha.u + \beta.v$$
     donc $f(x) = \alpha.v - \beta.u$, or $x \in \mathrm{Ker} f$ d'où
     $$\alpha.v - \beta.u = 0_{\mathbb{R}^4}$$
     or (u,v) libre donc $\alpha = \beta = 0$ donc $x = 0_{\mathbb{R}^4}$.

   $\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^4}\}.}$

2. Les deux conditions
   - ⋆ $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ (question précédente),
   - ⋆ $\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = 4$ (théorème du rang)

   permettent de conclure que $\mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f = \mathbb{R}^4$.
Par ailleurs, nous avons prouvé que (u,v) est une base de $\mathrm{Im} f$, et nous pouvons choisir (e_3,e_4) une base de $\mathrm{Ker} f$ (qui est de dimension 2 d'après le théorème du rang) de sorte que $\mathcal{B} = (u,v,e_3,e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
Ainsi, $\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Or ce n'est pas tout à fait la matrice attendue. Deux idées permettent de terminer l'exercice,
   - — en posant $\mathcal{B}' = (v,u,e_3,e_4)$, $\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
   - — en posant $\mathcal{B}'' = (u,-v,e_3,e_4)$, $\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}'') = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Enfin, en notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à la base $\mathcal{B}'$ (resp. $\mathcal{B}''$), on a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P^{-1}AP\ .$$

▷ Corrigé de l'exercice 4.5

1. Traitons le cas $n = 3$.

$$P_3 = \mathcal{P}((e_1, e_2, e_3) \to (e_3, e_2, e_1)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En résolvant le système linéaire $P_3X = Y$, on obtient imméditement que $P_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P_3$.

Sachant que la formule de changement de base donne

$$A' = P_3^{-1}AP_3 = P_3AP_3$$

le calcul explicite donne $A' = \begin{bmatrix} A_{3,3} & A_{3,2} & A_{3,1} \\ A_{2,3} & A_{2,2} & A_{2,1} \\ A_{1,3} & A_{1,2} & A_{1,1} \end{bmatrix}$.

On observe une sorte de « symétrie centrale par rapport au centre de la matrice ».
Montrons cela en toute généralité.
Posons $P_n = \mathcal{P}((e_1, \ldots, e_n) \to (e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1))$. On a

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\ ,\ [P_n]_{i,j} = \delta_{i,1+n-j}$$

et la résolution du système $P_nX = Y$ donne $P_n^{-1} = P_n$.
Calculons, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned} A'_{i,j} &= [P_nAP_n]_{i,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} [P_n]_{i,k}[AP_n]_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} [P_n]_{i,k} \sum_{s=1}^{n} A_{k,s}[P_n]_{s,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} [P_n]_{i,k} \underbrace{\sum_{s=1}^{n} A_{k,s}\delta_{s,1+n-j}}_{= A_{k,1+n-j}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\delta_{i,1+n-k}}_{\substack{\neq 0 \\ \iff i = 1+n-k \\ \iff k = 1+n-i}} A_{k,1+n-j} \\ &= A_{1+n-i,1+n-j} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } A' = [A_{1+n-i,1+n-j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}\ .}$$

2. Dans le cas $n = 2$, en posant $P_2 = \mathcal{P}((e_1, e_2) \to (e_2, e_1)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$$A' = P_2^{-1}AP_2 = P_2 \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} P_2 = \begin{bmatrix} A_{2,2} & A_{2,1} \\ A_{1,2} & A_{1,1} \end{bmatrix}$$

de sorte que si $A_{1,1} = A_{2,2} = 0$, $A' = \begin{bmatrix} 0 & A_{2,1} \\ A_{1,2} & 0 \end{bmatrix} =^t A$.

▷ Corrigé de l'exercice 4.6

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ son semblables} &\iff \exists P \in GL_2(\mathbb{R})\ :\ A = P^{-1}BP \\ &\iff \exists P \in GL_2(\mathbb{R})\ :\ PA = BP \end{aligned}$$

Cherchons donc $P = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $PA = BP$.

$$\begin{aligned}
PA = BP \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2x+y & x+2y \\ 2z+t & z+2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 3z & 3t \end{bmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & & & & & = & x \\ x & + & 2y & & & & & = & y \\ & & & & 2z & + & t & = & 3z \\ & & & & z & + & 2t & = & 3t \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & & & & & = & 0 \\ x & + & y & & & & & = & 0 \\ & & & - & z & + & t & = & 0 \\ & & & & z & - & t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & y & & = 0 \\ & & z & & & - \; t & = 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} -r & r \\ s & s \end{bmatrix} \middle| \; (r,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}
\end{aligned}$$

Parmi toutes les solutions trouvées ci-dessus, la matrice $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ appartient à $GL_2(\mathbb{R})$ donc A et B sont semblables et la relation de similitude est $A = P^{-1}BP$.

▷ Corrigé de l'exercice 4.7

1. ⋆ Par définition, $u(e_2) = b.e_1 + c.e_2 = c.e_2 + b.e_1$ et $u(e_1) = a.e_1 = 0.e_2 + a.e_1$ donc

$$\mathrm{mat}(u, (e_2, e_1)) = \begin{bmatrix} c & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$$

⋆ $u(\lambda.e_1) = \lambda.u(e_1) = (\lambda a).e_1 = a.(\lambda.e_1)$ et $u(\lambda.e_2) = \lambda.u(e_2) = \lambda(b.e_1 + c.e_2) = b.(\lambda.e_1) + c.(\lambda.e_2)$ donc

$$\mathrm{mat}(u, (\lambda.e_1, \lambda.e_2)) = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

⋆ $u(e_1) = a.e_1$ et $u(\lambda.e_2) = \lambda.u(e_2) = \lambda(b.e_1 + c.e_2) = \lambda b.e_1) + c.(\lambda.e_2)$ donc

$$\mathrm{mat}(u, (e_1, \lambda.e_2)) = \begin{bmatrix} a & \lambda b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

2. Notons $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et, pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $M_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Notons $\widehat{m}$ et $\widehat{m_\lambda}$ les endomorphismes de $\mathbb{K}^2$ canoniquement associés à M et M_λ, (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{K}^2$.

D'après la question précédente,

$$\mathrm{mat}(\widehat{m}, (e_1, \lambda.e_2)) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les matrices M et M_λ représentent le même endomorphisme lu dans des bases différentes, elles sont donc semblables.

Précisons la matrice de passage en posant $P = \mathcal{P}(e_1, e_2() \to (e_1, \lambda.e_2))$. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. La formule de changement de base s'écrit

$$\mathrm{mat}(\widehat{m}, (e_1, \lambda.e_2)) = P^{-1}\mathrm{mat}(\widehat{m}, (e_1, e_2))P$$

soit

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P$$

Vérifions cette relation par le calcul :

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } \lambda \in \mathbb{K}^*, \text{ les matrices } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ sont dans la même classe de similitude.}}$$

3. Notons $\mathcal{C}$ la classe de similitude de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
D'après la question précédente, $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$.
Par ailleurs, en utilisant la question 1 et en reprenant les notations et les idées de la question 2,

$$\mathrm{mat}(\widehat{m}, (e_2, e_1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Les matrices M et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ représentent le même endomorphisme lu dans des bases différentes, elles sont donc semblables d'où $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}$. Or $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \notin \mathcal{E}$,

donc $\boxed{\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{K}^* \right\} \text{ n'est pas une classe de similitude.}}$

Rmq Vérifions que M et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont semblables par le calcul : notons $Q = \mathcal{P}((e_1, e_2) \to (e_2, e_1))$.
$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. La formule de changement de base s'écrit

$$\mathrm{mat}(\widehat{m}, (e_2, e_1)) = Q^{-1}\mathrm{mat}(\widehat{m}, (e_1, e_2))Q$$

soit $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q$.
En effet,

$$Q^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

▷ Corrigé de l'exercice 4.8

Procédons par récurrence sur la dimension de l'espace E en considérant la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par
$\mathcal{P}(n)$: « pour tout espace vectoriel E de dimension n , pour tout endomorphisme nilpotent u de E, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{mat}(u, \mathcal{B})$ est strictement triangulaire supérieure ».

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie car le seul endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension 1 est l'endomorphisme nul.
- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.
  $\mathrm{Ker} u \neq \{0_E\}$ (sinon f serait injectif donc u^p serait injectif pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ ce qui contredit la nilpotence de u). On peut donc choisir $e_1 \in \mathrm{Ker} u \setminus \{0_E\}$. (e_1) est libre (car $e_1 \neq 0_E$) donc on peut le compléter en une base de E en lui adjoignant un vecteur e_2.

  $$\mathrm{mat}(u, (e_1, e_2)) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

  où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sont les coordonnées de $u(e_2)$ dans $(e_1, 2)$.
  Une récurrence immédiate montre que

  $$\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ \mathrm{mat}(u^k, (e_1, e_2)) = \begin{bmatrix} 0 & ab^{k-1} \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$$

  or u est nilpotente donc $\exists p \in \mathbb{N}^* : \mathrm{mat}(u^p, (e_1, e_2)) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$ donc $b^p = 0$, or $\mathbb{K}$ est un corps donc, par intégrité, $b = 0$.
  Par conséquent, $\mathrm{mat}(u, (e_1, e_2)) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
  Ainsi, $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et $n \geqslant 1$.
  Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.

▷ Corrigé de l'exercice 4.9

1. Notons $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

$$(A - \lambda.I_3)X = 0_{3,1} \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} (1-\lambda)x_1 & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & (2-\lambda)x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & & & & (4-\lambda)x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

⋆ Si $\lambda = 1$,

$$\begin{aligned}(A-\lambda.I_3)X = 0_{3,1} &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 0\end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0\end{array}\right. \\ &\iff X \in \left\{ \begin{bmatrix} -3t \\ 3t \\ t \end{bmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

⋆ Si $\lambda = 2$,

$$\begin{aligned}(A-\lambda.I_3)X = 0_{3,1} &\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -x_1 & & & = & 0 \\ x_1 & & & = & 0 \\ x_1 & & 2x_3 & = & 0\end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & & & = & 0 \\ & & x_3 & = & 0\end{array}\right. \\ &\iff X \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

⋆ Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned}(A-\lambda.I_3)X = 0_{3,1} &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)x_1 & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & (2-\lambda)x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & & & & (4-\lambda)x_3 & = & 0\end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & & & = & 0 \\ & x_2 & & = & 0 \\ & & (4-\lambda)x_3 & = & 0\end{array}\right.\end{aligned}$$

⋆⋆ Si $\lambda = 4$, $(A-\lambda.I_3)X = 0_{3,1} \iff X \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}$.

⋆⋆ Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 4\}$, $(A-\lambda.I_3)X = 0_{3,1} \iff X \in \{0_{3,1}\}$.

2. Soit $e \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul générateur d'une droite D (donc $D = \text{Vect}\{e\}$) stabilisée par u. Alors $u(e) \in D$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} : u(e) = \lambda.e$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que le système $AX = \lambda.X$ admet au moins une solution non nulle.

   D'après la question précédente, les seules valeurs possibles pour λ sont 1, 2 et 4.

   De plus la résolution effectuée dans la question précédent montre que pour chacune de ces valeurs il existe une unique droite.

   $$\boxed{\text{Ainsi, } u \text{ admet 3 droites stables : } D_1 = \text{Vect}\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\},\ D_2 = \text{Vect}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \text{ et } D_4 = \text{Vect}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.}$$

3. Notons $\mathcal{B}_{can,\mathbb{R}^3} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   Posons $e'_1 = -3e_1 + 3e_2 + e_3$, $e'_2 = e_2$ et $e'_3 = e_3$.

   On montre assez simplement que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est libre, or elle est de cardinal 3 dans un espace de dimension 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Posons $P = \mathcal{P}(\mathcal{B}_{can,\mathbb{R}^3} \to \mathcal{B}')$.

   Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Notons $\widehat{m} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canniquement associé à M.

   $$M^2 = A \iff \widehat{m}^2 = u$$

   On en déduit que $\widehat{m} \circ u = \widehat{m} \circ \widehat{m}^2 = \widehat{m}^3 = \widehat{m}^2 \circ \widehat{m} = u \circ \widehat{m}$ donc $\widehat{m}$ commute avec u.

   Par conséquent,

   $$u(\widehat{m}(e'_1)) = (u \circ \widehat{m})(e'_1) = (\widehat{m} \circ u)(e'_1) = \widehat{m}(u(e'_1)) = \widehat{m}(e'_1)$$

   donc $\widehat{m}(e'_1) \in \text{Ker}(u - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}\{e'_1\}$. On en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R} : \widehat{m}(e'_1) = a.e'_1$.

   On montre de même que $\widehat{m}(e'_2) \in \text{Ker}(u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}\{e'_2\}$ et $\widehat{m}(e'_3) \in \text{Ker}(u - 4\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}\{e'_3\}$. On en déduit qu'il existe $(b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\widehat{m}(e'_2) = b.e'_2$ et $\widehat{m}(e'_3) = c.e'_3$.

Par conséquent,

$$\exists(a,b,c)in\mathbb{R}^3 \ : \ \mathrm{mat}(\widehat{m},(e_1',e_2',e_3')) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

D'après la formule de changement de base, $\mathrm{mat}(\widehat{m},(e_1',e_2',e_3')) = P^{-1}\mathrm{mat}(\widehat{m},\mathcal{B}_{can,\mathbb{R}^3})P$ donc

$$\exists(a,b,c)in\mathbb{R}^3 \ : \ M = P\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}P^{-1}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est inclus dans

$$\left\{ P\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}P^{-1} \ \middle| \ (a,b,c)in\mathbb{R}^3 \right\}$$

Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ fixés quelconques. Posons $M = P\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}P^{-1}$.

La formule de changement de base donne $\mathrm{mat}(u,(e_1',e_2',e_3')) = P^{-1}\mathrm{mat}(u,\mathcal{B}_{can,\mathbb{R}^3})P$ donc

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = P^{-1}AP$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
M^2 = A \quad & \iff \quad P^{-1}M^2P = P^{-1}AP \\
& \iff \quad (P^{-1}MP)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\
& \iff \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\
& \iff \quad \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\
& \iff \quad \begin{cases} a \in \{-1,1\} \\ b \in \{-\sqrt{2},\sqrt{2}\} \\ c \in \{-2,2\} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ P\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}P^{-1} \ \middle| \ a\in\{-1,1\}, b\in\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}, c\in\{-2,2\} \right\}$$

▷ **Corrigé de l'exercice 4.10**

▷ **Corrigé de l'exercice 5.1**

⋆ **Méthode 1 : passage par les applications linéaires canoniquement associées.**
Notons $\widehat{a}\in\mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ et $\widehat{b}\in\mathcal{L}(\mathbb{K}^q,\mathbb{K}^p)$ les applications linéaires canoniquement associées à A et B.

- On a

$$\mathrm{mat}(\widehat{a}\circ\widehat{b},\mathcal{B}_{can,\mathbb{K}^q},\mathcal{B}_{can,\mathbb{K}^n}) = \mathrm{mat}(\widehat{a},\mathcal{B}_{can,\mathbb{K}^p},\mathcal{B}_{can,\mathbb{K}^n}) \times \mathrm{mat}(\widehat{b},\mathcal{B}_{can,\mathbb{K}^q},\mathcal{B}_{can,\mathbb{K}^p}) = AB$$

donc l'application linéaire canoniquement associée à AB est $\widehat{a}\circ\widehat{b}$ si bien que

$$\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(\widehat{a}\circ\widehat{b}) = \dim\mathrm{Im}(\widehat{a}\circ\widehat{b}) = \dim\widehat{a}(\mathrm{Im}\widehat{b}) \underbrace{\leqslant}_{\widehat{a}(\mathrm{Im}\widehat{b})\subset\mathrm{Im}\widehat{a}} \dim(\mathrm{Im}\widehat{a}) = \mathrm{rg}\widehat{a}$$

- Par ailleurs,
$$\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(\widehat{a} \circ \widehat{b}) = \dim \mathrm{Im}(\widehat{a} \circ \widehat{b}) = \dim \widehat{a}(\mathrm{Im}\widehat{b})$$
or la dimension de l'image d'un espace vectoriel par une application linéaire est toujours inférieure ou égale à sa dimension donc $\dim \widehat{a}(\mathrm{Im}\widehat{b}) \leqslant \dim\dim(\mathrm{Im}\widehat{b}) = \mathrm{rg}\widehat{b}$ d'où $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}\widehat{b} = \mathrm{rg}B$.

$\star$ **Méthode 2 : matriciellement avec la décomposition Pj_rQ.**
Posons $r_A = \mathrm{rg}A$ et $r_B = \mathrm{rg}B$.
Effectuons les décompositions Pj_rQ de A et B :
$$\exists (P_A, Q_A) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}) \ : \ A = P_A J_{r_A} Q_A$$
$$\exists (P_B, Q_B) \in GL_p(\mathbb{K}) \times GL_q(\mathbb{K}) \ : \ A = P_B J_{r_B} Q_B$$
On a donc
$$\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(P_A J_{r_A} Q_A P_B J_{r_B} Q_B)$$
or le rang est invariant par multiplication à droite/gauche par une matrice inversible donc
$$\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(J_{r_A} Q_A P_B J_{r_B} Q_B) = \mathrm{rg}(J_{r_A} Q_A P_B J_{r_B})$$
Posons $M = Q_A P_B$.
Observons, en effectuant le produit par blocs, qu'il existe $M' \in \mathcal{M}_{r_A,p}(\mathbb{K})$
$$J_{r_A} M = \left[\begin{array}{c} M' \\ \hline 0_{n-r_A,p} \end{array}\right]$$
si bien qu'il existe $M'' \in \mathcal{M}_{r_A,r_B}(\mathbb{K})$:
$$J_{r_A} M J_{r_B} = \left[\begin{array}{c|c} M''' & 0_{r_A,q-r_B} \\ \hline 0_{n-r_A,r_B} & 0_{n-r_A,q-r_B} \end{array}\right]$$
donc
$$\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(J_{r_A} M J_{r_B}) = \mathrm{rg}\left(\left[\begin{array}{c|c} M'' & 0_{r_A,q-r_B} \\ \hline 0_{n-r_A,r_B} & 0_{n-r_A,q-r_B} \end{array}\right]\right) = \mathrm{rg}M''$$
or nous savons que le rang d'une matrice est majoré par la plus petite de ses deux dimensions d'où
$$\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}M'' \leqslant \min(r_A, r_B)$$

$\star$ **Méthode 3.**
Notons $\varphi_A \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}\right.$
Notons $(B_1, \ldots, B_q) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})^q$ les q colonnes de B de sorte que
$$AB = [AB_1|AB_2|\ldots|AB_q] = [\varphi(B_1)|\varphi(B_2)|\ldots|\varphi(B_q)]$$
Par définition du rang,
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}AB & = & \dim\mathrm{Vect}\{\varphi(B_1), \varphi(B_2), \ldots, \varphi(B_q)\} \\ & = & \dim\varphi\left(\mathrm{Vect}\{B_1, B_2, \ldots, B_q\}\right) \\ & & \text{or la dimension de l'image d'un sev est majorée par la dimension du sev} \\ & \leqslant & \dim\mathrm{Vect}\{B_1, B_2, \ldots, B_q\} \\ & \leqslant & \mathrm{rg}B \end{array} \tag{5}$$
Sachant que $\mathrm{rg}AB \leqslant \mathrm{rg}B$, on montre que $\mathrm{rg}AB \leqslant \mathrm{rg}A$ astucieusement en passant par la transposée et en utilisant que la tranposition n'affecte pas le rang :
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(AB) & = & \mathrm{rg}(^tAB) \\ & = & \mathrm{rg}(^tB^tA) \\ & \leqslant & \mathrm{rg}(^tA) \quad \text{en appliquant (5) pour } A \leftarrow^t B \text{ et } B \leftarrow^t A \\ & \leqslant & \mathrm{rg}A \end{array}$$

Ainsi, $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$.

▷ Corrigé de l'exercice 5.2

1. Rappeler les définitions et les propriétés des sous-espaces vectoriels qui caractérisent un projecteur vectoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
2. Montrer que le rang d'un projecteur d'un espace de dimension finie est égal à sa trace.
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$. u est semblable à v s'il existe $\varphi \in \mathcal{GL}(E)$ telle que $u = \varphi^{-1} \circ v \circ \varphi$.
   (a) Montrer que la relation binaire « être semblable » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{GL}(E)$.
   (b) Montrer que deux projecteurs d'un espace de dimension finie sont semblables si et seulement si ils ont le même rang.

▷ Corrigé de l'exercice 5.3

1. Notons $(C_1, \dots, C_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ les colonnes de A.
   Si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $C_i = 0_{\mathcal{M}_{n,1}}$, alors $A = 0_{n,n}$ donc $\text{rg}A = 0$ ce qui contredit $\text{rg}A = 1$.
   Par conséquent, $\exists i_0 \in [\![1,n]\!] : C_{i_0} \neq 0_{n,1}$.
   Posons $C_{i_0} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$.
   Puisque A est de rang 1,
   $$\text{Vect}\{C_1, \dots, C_n\} = \text{Vect}\{C_{i_0}\}$$
   donc $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j \in \text{Vect}\{C_{i_0}\}$ donc $\exists b_j \in \mathbb{K} : C_j = b_j.C_{i_0}$.
   Ainsi, $A = [C_1|\dots|C_n] = [b_1.C_{i_0}|\dots|b_n.C_{i_0}] = C_{i_0} \times [b_1 b_2 \dots b_n]$.
   Posons $C = C_{i_0} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $C' = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a donc
   $$A = C_{i_0} \times [b_1 b_2 \dots b_n] = C \times {}^t C'$$
2. Observons que, par assoiativité du produit matriciel,
   $$A^2 = C \times \underbrace{{}^tC' \times C}_{= [a] \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})} \times {}^tC' = \underbrace{C \times [a]}_{= a.C} \times {}^tC' = a.C \times {}^t C' = a.A$$
   On montre alors par une récurrence simple que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A^{p+1} = a^p A$.
3. Observons que, par abus de notation (matrices $(1,1)$ confondues avec les scalaires)
   $$\begin{aligned} a &= {}^tC' \times C \\ &= [b_1 b_2 \dots b_n] \times \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i c_i \end{aligned}$$
   Par ailleurs,
   $$A = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \times [b_1 b_2 \dots b_n] = \begin{bmatrix} c_1 b_1 & c_1 b_2 & \cdots & c_1 b_n \\ c_2 b_1 & c_2 b_2 & \cdots & c_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n b_1 & c_n b_2 & \cdots & c_n b_n \end{bmatrix}$$
   donc
   $$\text{Tr}A = \sum_{i=1}^{n} b_i c_i = a$$
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. On a prouvé que
   $$A^2 = \text{Tr}(A).A$$
   Montrons que A est un projecteur si et seulement si $\text{Tr}(A) = 1$.
   ⋆ Si $\text{Tr}(A) = 1$, alors $A^2 = A$ donc A est une matrice de projection.

$\star$ Si A est un projecteur, alors $A^2 = A$ or $A^2 = \text{Tr}(A).A$ donc $A = \text{Tr}(A).A$ si bien que

$$(1 - \text{Tr}(A)).A = 0_{n,n}$$

or $A \neq 0_{n,n}$ (sinon $\text{rg}(A) = 0$ or ici $\text{rg}(A) = 1$) donc $1 - \text{Tr}(A) = 0_{\mathbb{K}}$ si bien que $\text{Tr}(A) = 1$.

Soit $\widehat{a}$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Si A est un projecteur,

$$\begin{aligned}
x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i \in \text{Ker}\widehat{a} \quad &\Longleftrightarrow \quad \widehat{a}(x) = 0_{\mathbb{K}^n} \\
&\Longleftrightarrow \quad A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0_{n,1} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_1 b_j x_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_n b_j x_j \end{bmatrix} = 0_{n,1} \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ \sum_{j=1}^{n} c_i b_j x_j = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ c_i \sum_{j=1}^{n} b_j x_j = 0
\end{aligned}$$

Or, $C \neq 0_{n,1}$ donc $\exists i_0 \in [\![1, n]\!] : c_{i_0} \neq 0_{\mathbb{K}}$ si bien que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i \in \text{Ker}\widehat{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} b_j x_j = 0$$

$$\begin{aligned}
x \in \text{Im}\widehat{a} \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in \text{Vect}\{\widehat{a}(e_1), \widehat{a}(e_2), \ldots, \widehat{a}(e_n)\} \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{mat}(x, (e_1, \ldots, e_n)) \in \text{Vect}\{b_1.C_{i_0}, b_2.C_{i_0}, \ldots, b_n.C_{i_0}\} \\
& \quad \text{or } \exists j_0 \in [\![1, n]\!] : b_{j_0} \neq 0_{\mathbb{K}} \text{ donc } \text{Vect}\{b_1.C_{i_0}, b_2.C_{i_0}, \ldots, b_n.C_{i_0}\} = \text{Vect}\{C_{i_0}\} \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{mat}(x, (e_1, \ldots, e_n)) \in \text{Vect}\{C_{i_0}\} \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in \text{Vect}\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i.e_i\right\}
\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque A est une matrice de projection, $\widehat{a}$ est la projection vectorielle de rang 1 sur la droite vectorielle $\text{Vect}\{\sum_{i=1}^{n} c_i.e_i\}$ et parallèlement à l'hyperplan d'équation $\sum_{j=1}^{n} b_j x_j = 0$.

5. Pour étudier l'inversibilité de $B = A + I_n$, cherchons une expression polynomiale annulant B sachant que le polynôme $X^2 - \text{Tr}(A)X$ annule A.
Or $A = B - I_n$ donc

$$(B - I_n)^2 - \text{Tr}(A)(B - I_n) = 0_{n,n}$$

donc

$$B^2 - (2 + \text{Tr}(A))B + (1 + \text{Tr}(A))I_n = 0_{n,n}$$

$\star$ Si $\text{Tr}(A) \neq -1$, alors $1 + \text{Tr}(A) \neq 0$ donc la relation polynomiale ci-dessus donne

$$B \times \frac{1}{\text{Tr}(A) + 1}.\left(B - (2 + \text{Tr}(A)).I_n\right) = I_n$$

donc B est inversible à droite, donc B est inversible et son inverse est son inverse à droite :

$$B^{-1} = \frac{1}{\text{Tr}(A) + 1}.\left(B - (2 + \text{Tr}(A)).I_n\right)$$

⋆ Si $\mathrm{Tr}(A) = -1$, alors la relation polynomiale ci-dessus donne

$$B^2 - B = 0_{n,n}$$

donc B est la matrice d'un projecteur. Par conséquent, $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(I_n + A) = \mathrm{Tr}(I_n) + \mathrm{Tr}(A) = n - 1$ donc $\mathrm{rg}(B) < n$ donc $B \notin GL_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } B = I_n + A \text{ est inversible si et seulement si } a \neq -1.}$$

▷ **Corrigé de l'exercice 5.4**

▷ **Corrigé de l'exercice 5.5**

▷ **Corrigé de l'exercice 5.6**

▷ **Corrigé de l'exercice 5.7**

1. Non, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \times)$ n'est pas un groupe ! f est seulement un morphisme du magma associatif $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \times)$ dans le magma associatif $(\mathbb{R}, \times)$. Ces magmas ne sont pas unitaires (le candidat neutre est I_n resp. 1 or $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \times I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ resp. $0 \times 1 = 0$) donc ce ne sont pas des groupes !
2. $I_n^2 = I_n$ donc $f(I_n)^2 = f(I_n)$ d'où $f(I_n) \in \{0, 1\}$. Si $f(I_n) = 0$, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = f(MI_n) = f(M)f(I_n) = 0$ donc f est l'application identiquement nulle, contradiction, donc $f(I_n) = 1$.
De même, $0^2_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $f(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})^2 = f(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ donc $f(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \in \{0, 1\}$. Si $f(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = 1$, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = f(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})f(M) = f(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}M) = f(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = 1$ donc f est l'application constante égale à 1, contradiction, donc $f(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = 0$.
3. $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $f(A)^p = 0$ donc $f(A) = 0$ car 0 est l'unique solution de $x^p = 0$ dans $\mathbb{R}$.
4.
   - Si $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $MM^{-1} = I_n$ donc $f(M)f(M^{-1}) = 1$ donc $f(M) \neq 0$.
   - Le sens réciproque se prouve par la contraposée : montrons que si une matrice n'est pas inversible, alors $f(M) = 0$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Notons $r \in [\![0, n-1]\!]$ le rang de M. La décomposition PJ_rQ de M donne : $\exists (P, Q) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})^2$ tels que $M = PJ_rQ$ si bien que $f(M) = f(P)f(J_r)f(Q)$. Par ailleurs la matrice J_r est de rang $r < n$ donc elle est équivalente à la matrice $N_r = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ car cette dernière est aussi de rang r (la matrice N_r s'interprète comme la matrice représentant l'endomorphisme canoniquement associé à J_r relativement à la base $\{e_n, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ où $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de R^n). Or la matrice N_r est nilpotente : $N_r^n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc d'après la question précédente, $f(N_r) = 0$, or $\exists (P', Q') \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})^2$ tels que $J_r = P'N_rQ'$ donc $f(J_r) = f(P')f(N_r)f(Q') = 0$ d'où $f(M) = 0$.
   Une autre preuve consiste à introduire, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, la matrice $J_{r,k}$ qui est celle représentant l'endomorphisme canoniquement associé à J_r relativement à la base $\{e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\}$ où σ est la transposition (k, n) et $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de R^n. On peut expliciter ces matrices, $J_{r,k}$ est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux non nuls sont ceux d'indice $([\![1, r]\!] \setminus \{k\}) \cup \{n\}$ et ils valent 1.
   Toutes ces matrices étant semblables à J_rd, il existe $(P_k)_{k \in [\![1,r]\!]} \in GL_n(\mathbb{R})$:
   $$\forall k \in [\![1, r]\!]\ ,\ J_r = P_k J_{r,k} P_k^{-1}$$
   Ainsi,
   $$\begin{aligned} f(M^r) &= \prod_{k=1}^{r} f(PJ_rQ) \\ &= f(P)f(Q) \prod_{k=1}^{r} f(P_k J_{r,k} p_k^{-1}) \\ &= f(P)f(Q) \prod_{k=1}^{r} f(P_k)f(P_k^{-1})f(J_{r,k}) \\ &= f(P)f(Q)f\left(\prod_{k=1}^{r} J_{r,k}\right) \quad \text{car } f(P_k)f(P_k^{-1}) = f(I_n) = 1 \end{aligned}$$
   d'où le résultat en remarquant que $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} J_{r,k} = 0_{n,n}$.

▷ **Corrigé de l'exercice 5.8**

1. Quels sont les inverses, s'ils existent, des matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$?

La résolution des systèmes linéaires correspondants permet de montrer que

   ⋆ $A \in GL_2(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$,

   ⋆ $B \notin GL_2(\mathbb{R})$ car $B \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0_{2,1}$,

   ⋆ $C \in GL_3(\mathbb{R})$ et $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

2. Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Calculer A^2 et en déduire une expression polynômiale annulant A. A est-elle inversible et si oui quel est son inverse ?

$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ donc $A^2 + A - 2I_3 = 0_3$ soit $A\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_3\right) = I_3$. Par conséquent, $A \in GL_3(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

3. L'ensemble des matrices $\mathcal{E} = \left\{ A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid \exists (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 : A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix} \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? un sous-anneau ? Quels sont les éléments inversibles dans cet ensemble de cet ensemble ?

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\{E^{1,1} + E^{3,3}, E^{2,2}, E^{1,3} + E^{3,1}\} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{E}$, défini comme le sous-espace engendré par $(E^{1,1} + E^{3,3}, E^{2,2}, E^{1,3} + E^{3,1})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. La famille génératrice $(E^{1,1} + E^{3,3}, E^{2,2}, E^{1,3} + E^{3,1})$ est aussi libre (exo facile en utilisant que $\{E^{i,j} \mid (i,j) \in [\![1,3]\!]^2\}$ est une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$), donc $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E} = 3$.
De plus

   ⋆ $\mathcal{E}$ est inclus dans l'anneau $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$,
   ⋆ $\mathcal{E} \neq \emptyset$ car $0_3 \in \mathcal{E}$,
   ⋆ $\mathcal{E}$ est stable pour la loi $+$ car c'est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$,
   ⋆ $\mathcal{E}$ est stable pour la loi $\times$:

   Soient $\left(\begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & 0 & c' \\ 0 & b' & 0 \\ c' & 0 & a' \end{bmatrix} \right) \in \mathcal{E}^2$ fix'ee quelconques.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a' & 0 & c' \\ 0 & b' & 0 \\ c' & 0 & a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cc' & 0 & ca' + ac' \\ 0 & bb' & 0 \\ ca' + ac' & 0 & aa' + cc' \end{bmatrix} \in \mathcal{E}$$

   ⋆ $(\mathcal{E}, \times)$ admet un neutre qui est I_n (pour $a = 1$, $b = 1$ et $c = 0$).

Ainsi, $(\mathcal{E}, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{C}), +, \times)$. De plus, nous pouvons remarquer que cet anneau est commutatif (par symétrie des coefficients du produit de deux éléments de $\mathcal{E}$).

La matrice $M(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix} \in \mathcal{E}$ est inversible si et seulement il existe $(a', b', c') \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$M(a,b,c) \times M(a',b',c') = M(a',b',c') \times M(a,b,c) = I_n$$

qui équivaut, puisque l'anneau est commutatif, à

$$M(a,b,c)\times M(a',b',c')=I_n \quad (*)$$

Or

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} aa'+cc' & 0 & ca'+ac' \\ 0 & bb' & 0 \\ ca'+ac' & 0 & aa'+cc' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} aa'+cc' & = & 1 \\ bb' & = & 1 \\ ca'+ac' & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} b\in\mathbb{C}^* & & \\ aa'+cc' & = & 1 \\ ca'+ac' & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Or le système linéaire 2×2 d'inconnues $(x,y)\in\mathbb{C}^2$ et de paramètres $(a,c)\in\mathbb{C}^2$ (S) $\left\{ \begin{array}{rcrcl} ax & + & cy & = & 1 \\ cx & + & ay & = & 0 \end{array} \right.$
a pour déterminant a^2-c^2 si bien que

— si $a^2-c^2\neq 0$, il existe une unique solution au système qui vaut $\left(\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & a \end{vmatrix}}{a^2-c^2} = \dfrac{a}{a^2-c^2}, \dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{a^2-c^2} = -\dfrac{c}{a^2-c^2} \right)$

— si $a^2-c^2=0$, alors
  — soit $a=c$ si bien que

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} ax & + & ay & = & 1 \\ ax & + & ay & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} ax & + & cy & = & 1 \\ & & 0 & = & 1 \end{array} \right.$$

  donc (S) n'admet aucune solution,
  — soit $a=-c$ si bien que

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} ax & - & ay & = & 1 \\ -ax & + & ay & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} ax & + & cy & = & 1 \\ & & 0 & = & 1 \end{array} \right.$$

  donc (S) n'admet aucune solution.
  En conclusion, $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ étant fixés quelconques,

$$\exists(a',b',c')\in\mathbb{C}^3 \ : \ M(a,b,c)\times M(a',b',c')=I_n \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} b & \neq & 0 \\ a^2-c^2 & \neq & 0 \end{array} \right.$$

  et de plus, si $\left\{ \begin{array}{rcl} b & \neq & 0 \\ a^2-c^2 & \neq & 0 \end{array} \right.$, il existe un unique triplet (a',b',c') solution qui est $\left(\dfrac{a}{a^2-c^2}, \dfrac{1}{b}, -\dfrac{c}{a^2-c^2}\right)$
  donc

$$\begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{a^2-c^2} & 0 & -\dfrac{c}{a^2-c^2} \\ 0 & \dfrac{1}{b} & 0 \\ -\dfrac{c}{a^2-c^2} & 0 & \dfrac{a}{a^2-c^2} \end{bmatrix}.$$

4. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que pour tout $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, $(AB)^2=0$, alors $A=0$.
   Vrai.
   Fixons $(i,j)\in[\![1,3]\!]^2$.
   Particularisons pour $B=E^{1,1}$: $AB=AE^{1,1}=\begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 \\ A_{2,1} & 0 & 0 \\ A_{3,1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ si bien que $(AB)^2=\begin{bmatrix} A_{1,1}^2 & 0 & 0 \\ A_{2,1}A_{1,1} & 0 & 0 \\ A_{3,1}A_{1,1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$
   donc $A_{1,1}^2=0$ donc $A_{1,1}=0$.
   Plus généralement, fixons $(i,j)\in[\![1,3]\!]^2$ et particularisons pour $B=E^{i,j}$, on trouve $A_{j,i}^2=0$ d'où $A_{j,i}=0$.
   Ainsi, $A=0$.
5. Si A et B sont deux matrices carrées de même taille telles que $AB=0$, alors $A=0$ ou $B=0$.
   Faux.
   Pour $A=B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $AB=0_2$ et pourtant $A\neq 0_2\neq B$.

6. Donner une base de $\{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$ (comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel puis comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel).
La famille $\{E^{1,2}, E^{1,3}, E^{2,1}, E^{2,3}, E^{3,1}, E^{3,2}, E^{1,1} - E^{3,3}, E^{2,2} - E^{3,3}\}$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel KerTr (hyperplan de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ donc de dimension 8). Une base de cet espace vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel (donc de dimension 16 et ce n'est plus un hyperplan car le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est de dimension 18 donc un hyperplan de cet espace est de dimension 17 ! en effet la trace n'est pas une forme linéaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car elle est à valeur dans $\mathbb{C}$ alors que le nouveau corps de base est $\mathbb{R}$!) est donnée par l'union de
$$\{E^{1,2}, E^{1,3}, E^{2,1}, E^{2,3}, E^{3,1}, E^{3,2}, E^{1,1} - E^{3,3}, E^{2,2} - E^{3,3}\}$$
et de
$$\{i.E^{1,2}, i.E^{1,3}, i.E^{2,1}, i.E^{2,3}, i.E^{3,1}, i.E^{3,2}, i.E^{1,1} - i.E^{3,3}, i.E^{2,2} - i.E^{3,3}\}\ .$$
7. Que peut-on dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Tr}({}^tAA) = 0$?
C'est la matrice nulle. En effet,
$$\forall i \in [\![1, n]\!]\ ,\ [{}^tAA]_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} {}^tA_{i,k}A_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,i}A_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,i}^2$$
si bien que
$$\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}^2\ .$$
Par conséquent,
   - $\star$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathrm{Tr}({}^tAA) = 0$ implique la nullité de tous les coefficients,
   - $\star$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la même conclusion ne tient pas ! par exemple si $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, on a $A \neq 0_2$ et $\mathrm{Tr}({}^tAA) = 0$.
8. Trouver deux matrices $(A_2, B_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ telles que $A_2B_2 = 0$ et $B_2A_2 \neq 0$. En déduire des matrices $(A_p, B_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$ $(p \geqslant 2)$ telles que $A_pB_p = 0$ et $B_pA_p \neq 0$.
Pour $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, on a $A_2B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B_2A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Le passage de la dimension 2 à la dimension $p \geqslant 2$ se fait en utilisant des matrices diagonales par blocs, par exemple $A_p = \begin{bmatrix} A_2 & 0_{2,p-2} \\ 0_{p-2,2} & 0_{p-2,p-2} \end{bmatrix}$ et $B_p = \begin{bmatrix} B_2 & 0_{2,p-2} \\ 0_{p-2,2} & 0_{p-2,p-2} \end{bmatrix}$ qui vérifient $A_pB_p = \begin{bmatrix} 0_{2,2} & 0_{2,p-2} \\ 0_{p-2,2} & 0_{p-2,p-2} \end{bmatrix}$ et $B_pA_P = \begin{bmatrix} B_2A_2 & 0_{2,p-2} \\ 0_{p-2,2} & 0_{p-2,p-2} \end{bmatrix}$.
9. Le produit de deux matrices symétriques est une matrice symétrique si et seulement si elles commutent.
10. Il existe $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_{2n}$.
Oui.
Pour $n = 1$ $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ vérifie $A_1^2 = -I_2$.
Le passage de la dimension 2 à la dimension $2n$ se fait en utilisant la matrice diagonale par blocs
$$A_n = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{2,2} & \cdots & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & A_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & \cdots & 0_{2,2} & A_1 \end{bmatrix}$$
qui vérifie
$$A_n^2 = \begin{bmatrix} A_1^2 & 0_{2,2} & \cdots & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & A_1^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & \cdots & 0_{2,2} & A_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_2 & 0_{2,2} & \cdots & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & -I_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & \cdots & 0_{2,2} & -I_2 \end{bmatrix} = -I_{2n}\ .$$
11. La trace d'un projecteur vectoriel est égale à son rang.
VRAI.
Soit p un projecteur de rang $r \in [\![0, n]\!]$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.
Alors $E = \mathrm{Im}p \oplus \mathrm{Ker}p$.
Choisissons $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}p$ ($\mathrm{dimIm}p = \mathrm{rg}p = r$) et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}p$ ($\mathrm{dimKer}p = n - r$ d'après le thórème du rang)

Posons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ la base obtenue par concaténation des deux bases précédentes.
Alors $\text{mat}(p, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix}$ si bien que $\text{Tr}(p)$ qui est la trace de toute matrice associée à p relativement à une même base au départ et à l'arrivée vaut $\text{Tr}(\text{mat}(p, \mathcal{B})) = r = \text{rg}p$.

12. La somme de deux matrices inversibles est inversible.
FAUX. $I_n + (-I_n) = 0_n \notin GL_n(\mathbb{K})$ ou $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \notin GL_n(\mathbb{K})$.

13. **Vu à l'oral de l'X.** Quelle est, sans calcul ou presque, la matrice inverse de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$?
la réponse est dans un exemple du cours.
Considérons $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ qui est nilpotente d'indice 5.
Avec N, $A = I_5 + 2N + (2N)^2 + (2N)^3 + (2N)^4$ si bien que l'on pense **immédiatement** et **spontanément** à une identité algébrique vraie dans un anneau en multipliant par $I_n - 2N$:

$$(I_5 - 2N)A = (I_5 - 2N)[I_5 + 2N + (2N)^2 + (2N)^3 + (2N)^4] = I_5 - (2N)^5 = I_5$$

donc $A^{-1} = I_5 - 2N = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

14. Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent et telles que $A^3 = 7I_n + B^3$, alors $A - B$ est inversible. Que se passe-t-il si la relation précédente est changée en $A^3 = 7I_n - B^3$?
Vrai.
Sachant que A et B commutent, on a la relation

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

donc

$$A^3 - B^3 = 7I_n \iff (A - B)\left(\frac{1}{7}A^2 + \frac{1}{7}AB\frac{1}{7}B^2\right) = I_n$$

donc $A - B \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A - B)^{-1} = \dfrac{1}{7}A^2 + \dfrac{1}{7}AB\dfrac{1}{7}B^2$
Si la relation change en $A^3 = 7I_n - B^3$, la même technique peut être adaptée en utilisant l'identité

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

si bien que

$$A^3 + B^3 = 7I_n \iff (A + B)\left(\frac{1}{7}A^2 - \frac{1}{7}AB\frac{1}{7}B^2\right) = I_n$$

d'où l'inversibilité de $A + B$.

15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^3 = 0$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(I_n + A + A^2)^k$.
On travaille dans la $\mathbb{R}$-algèbre commutative $\mathbb{R}[A]$ des polynômes en A :
— si $k = 1$, $(I_n + A + A^2)^1 = I_n + A + A^2$,
— si $k = 2$, $(I_n + A + A^2)^2 = I_n + A^2 + A^4 + 2I_nA + 2I_nA^2 + 2AA^2 = I_n + 2A + 3a^2$,

— si $k \geqslant 2$, la formule du binôme de Newton donne

$$\begin{aligned}
(I_n + A + A^2)^k &= (A(I_n + A) + I_n)^k \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i (I_n + A)^i I_n^{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{2} \binom{k}{i} A^i (I_n + A)^i \\
&= \binom{k}{0} I_n + \binom{k}{1} A(I_n + A) + \binom{k}{2} A^2 (I_n + A)^2 \\
&= I_n + kA(I_n + A) + \frac{k(k-1)}{2} A^2 (I_n + 2A + A^2) \\
&= I_n + kA + kA^2 + \frac{k(k-1)}{2} A^2 \\
&= I_n + kA + \frac{k(k+1)}{2} A^2
\end{aligned}$$

16. Résoudre, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $M^2 = I_2$.