Manipulation des symboles $\sum$ et $\prod$

1 Suites

1.1 Intervalles d'entiers

▷ **Exercice 1.1.**

1. Combien y a-t-il d'entiers naturels dans $[\![9, 2017]\!]$?
2. Combien y a-t-il d'entiers naturels pairs dans $[\![9, 2017]\!]$?
3. Combien y a-t-il d'entiers naturels impairs dans $[\![9, 2017]\!]$?

▷ **Exercice 1.2.**

1. Donner un paramétrage de $\{k \in [\![0, 5n]\!] \mid k \equiv -1\ [5]\}$ par des entiers consécutifs.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$ $A_n = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 5n \\ k \equiv -1\ [5]}} k$ et $B_n = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 5n \\ k \equiv -1\ [5]}} k^2$.

1.2 Suites arithmétiques et géométriques

▷ **Exercice 1.3.**

1. Si 2 et 5 sont les deux premiers termes d'une suite arithmétique, quel est le cinquième terme ?
2. Si 3 et -6 sont les deux premiers termes d'une suite géométique, quel est le cinquième terme ?

▷ **Exercice 1.4.** Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? géométriques ? si oui, caractérisez-les.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-5)^n}{10}$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-5)^n}{10^{n-1}}$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6(n+5)$.
6. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{2^{3n+1}}{3^{2n-1}}$.

▷ **Exercice 1.5. Suites à la fois arithmétiques et géométriques.**
Déterminer les suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui sont arithmétiques et géométriques.

▷ **Exercice 1.6.**
Un placement financier à taux fixe rapporte 2 pourcents par an. Au bout de combien d'années une somme investie dans ce placement a-t-elle doublé ?

▷ **Exercice 1.7. Suite arithmético-géométrique**
Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2 - u_n$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n puis en déduire une expression explicite de u_n en fonction de n.

▷ **Exercice 1.8. Suite arithmético-géométrique**
Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit u la suite définie par $u_0 > 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \lambda u_n^\alpha$.
Exprimer explicitement u_n en fonction de n, α et λ.
On commencera par le cas $\lambda = 1$.

▷ **Exercice 1.9.**

1. Calculer $A = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + \ldots + \dfrac{1}{4096}$.
2. Calculer $B = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{4096}$.
3. Calculer $C = \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + 4 + \ldots + 64 + 64\sqrt{2}$. On exprimera C sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

▷ **Exercice 1.10.**
Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + 11 + 101 + 1001 + \ldots + \underbrace{10\ldots01}_{n \text{ zéros}}$ en fonction de n.

▷ **Exercice 1.11. Sommes de termes consécutifs de suites arithmétiques et géométriques.**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **la suite arithmétique** complexe de premier terme $u_0 \in \mathbb{C}$ et de raison $r \in \mathbb{C}$.
   Soient $(m,p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m \leqslant p$.
   Montrer que $\displaystyle\sum_{k=m}^{p} u_k = \underbrace{(p-m+1)\frac{u_m+u_p}{2}}_{\text{nb de termes} \times \text{moyenne des termes extrêmes}} = (p-m+1)\left(u_0 + \frac{p+m}{2}r\right)$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **la suite géométrique** complexe de premier terme $v_0 \in \mathbb{C}$ et de raison $q \in \mathbb{C}$.
   Soient $(m,p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m \leqslant p$.
   Montrer que $\displaystyle\sum_{k=m}^{p} v_k = \begin{cases} (p-m+1)v_0 & \text{si } q = 1, \\ \underbrace{v_m \times \dfrac{1-q^{p-m+1}}{1-q}}_{\text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison puissance le nb de termes}}{1-\text{raison}}} = \dfrac{v_m - v_{p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1. \end{cases}$

1.3 Notation factorielle

▷ **Exercice 1.12.** Simplifier, pour $n \geqslant 1$, en utilisant au besoin la notation factorielle :

1) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(3k)$ 2) $\displaystyle\prod_{k=3}^{3n+1}\frac{2}{k+1}$ 3) $\displaystyle\prod_{k=3}^{n^2}(3ke^{k+1})$ $(n \geqslant 2)$ 4) $\displaystyle\prod_{k=3}^{n+1}\frac{(k+1)(k-1)}{2}$ 5) $\displaystyle\prod_{k=3}^{n+1}\frac{(k+1)}{2(k-1)}$

▷ **Exercice 1.13.** Écrire les expressions ci-dessous avec un symbole sommatoire puis simplifier cette écriture en utilisant la notation factorielle.

$$A_n = 2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2) \times 2n \quad , \quad B_n = 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1) \ .$$

2 Symboles $\sum$ et $\prod$

2.1 Manipulations techniques sur les symboles

▷ **Exercice 2.1. Calculs explicites**
Expliciter en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ les expressions suivantes :

1) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-3)^k$ 2) $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+2}2^{-k}$ 3) $c_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+2}(2^{k+1}-2^{k-1})$ 4) $d_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n}2^{3k+1}$
5) $e_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}16^{k^3}$ 6) $f_n = \displaystyle\sum_{\substack{k\equiv 1[3] \\ k\in[\![0,3n]\!]}} k^2$ 7) $g_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(1+(-1)^k)k$ 8) $h_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}2^{k(1-(-1)^k)}$

▷ **Exercice 2.2. Calculs explicites**
Simplifier en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et en utilisant la notation factorielle les expressions suivantes :

1) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1+2\ln k)$ 2) $b_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(-2\sqrt{k})$ 3) $c_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}(\ln(k^2-1)-\ln(k+1))$ 4) $d_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n}(2k+1)$
5) $e_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}(3k+6)$ 6) $f_n = \displaystyle\prod_{k=-n-1}^{n}(2k+1)$ 7) $g_n = \dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\prod_{k=-n}^{n}(2k+1)$ 8) $h_n = \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left((6k+3)^2 3^{\frac{2k}{n+1}}\right)}$

▷ **Exercice 2.3.** Compléter les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{2006}k^6 = \sum_{\ldots}^{1789}n^6 + \sum_{\ldots}^{\ldots}j^6 = \sum_{\substack{p=1 \\ p\equiv 1[2]}}^{2006}(\ldots)^6 + \sum_{\substack{p=1 \\ \ldots}}^{2006}p^6 = \sum_{\ldots}^{\ldots}(2n+1)^6 + \sum_{\ldots}^{\ldots}(2n)^6 = \sum_{\ldots}^{\ldots}(3n)^6 + \sum_{\ldots}^{\ldots}(3n+1)^6 + \sum_{\ldots}^{\ldots}(3n+2)^6.$$

$$\sum_{k=1}^{2007}k^6 = \sum_{\ldots}^{\ldots}(3n)^6 + \sum_{\ldots}^{\ldots}(3n+1)^6 + \sum_{\ldots}^{\ldots}(3n+2)^6 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{2n}e^{n^2} = \ldots \quad ; \quad \exp\left(\sum_{k=1}^{n+2}(2k+1)\right) = \prod_{\ldots}^{\ldots}e^p.$$

$$\exp\Big(\sum_{k=1}^{2n}(3+2k)\Big)=\exp(\dots)\Big(\prod_{\dots}^{\dots}e^k\Big)^{\dots}\;;\quad \exp\Big(\sum_{k=1}^{2n}(3+2k)\Big)=\exp(\dots)\quad;\quad \ln\Big(\prod_{k=2}^{2n}k^2\Big)=\dots\sum_{k=2}^{\dots}\ln(k)$$

$$\frac{n^2}{2n}+\frac{(n+1)^2}{2n+1}+\frac{(n+2)^2}{2n+2}+\dots+\frac{4n^2}{3n}=\sum_{k=\dots}^{\dots}\frac{k^2}{k+n}=\sum_{l=2n}^{\dots}\frac{\dots}{\dots}=\sum_{k=1}^{\dots}\frac{\dots}{\dots}=\sum_{i=\dots}^{n}\frac{\dots}{\dots}=\sum_{k=0}^{3n}\frac{k^2}{k+n}-\sum_{k=\dots}^{\dots}\frac{k^2}{k+n}-\sum_{k=\dots}^{\dots}\frac{k^2}{k+n}.$$

$$\ln\left(\frac{(4n)!^2}{(2n)!^2}\right)=\ln\Big(\prod_{k=\dots}^{\dots}\dots\Big)=2\sum_{k=\dots}^{\dots}\ln(k)\quad;\quad\sum_{k=1}^{2n}(\sqrt{k}+\sqrt{\pi})=\dots+\sum_{k=1}^{2n}\sqrt{k}=\dots+\sum_{\substack{k=1\\ \dots\equiv 1[2]}}^{2n}\dots+\sum_{\substack{k=1\\ \dots\equiv\dots[2]}}^{2n}\dots.$$

$$\ln\Big(\prod_{\substack{k=1\\ k\equiv 0[3]}}^{3n}k\Big)=\sum_{p=\dots}^{\dots}\ln(3p)=\dots\ln 3+\sum_{p=\dots}^{\dots}\ln(p)=\ln(3^{\cdots}(\dots!))\;;\frac{(4n)!(5n)!}{(2n-1)!(3n+1)!}=\prod_{k=\dots}^{\dots}k\prod_{k=\dots}^{\dots}k=\Big(\prod_{k=3n}^{4n}k\Big)^2\dots.$$

$$\prod_{p=1}^{n}\frac{2p+1}{p}=\frac{\prod_{p=1}^{n}(2p)\prod_{p=1}^{n}(2p+1)}{\dots(\dots)^2}=\frac{(2n+1)!}{\dots};\prod_{p=1}^{2n+1}e^{p^2-3p-2}=\dots\prod_{p=1}^{2n+1}e^{p^2}\prod_{\dots=1}^{\dots}e^{-3i}=\dots\exp(\dots)\exp(\dots).$$

$$\prod_{p=0}^{2n+1}e^p=\exp\Big(\sum_{\dots}^{\dots}\dots\Big)=\exp\Big(\dots\Big)\;;\;\prod_{p=0}^{2n+1}e^p=\prod_{\substack{p=0\\ p\equiv 0[2]}}^{2n+1}e^p\prod_{\substack{p=0\\ p\equiv\dots[2]}}^{2n+1}e^p=\prod_{p=0}^{n}e^{\cdots}\prod_{p=\dots}^{\dots}e^{2p+1}=\Big(\prod_{p=0}^{n}e^p\Big)^{\dots}e^{\cdots}=\dots.$$

▷ **Exercice 2.4.** Démontrer par récurrence l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\Big(\sum_{k=1}^{n}k\Big)^2.$$

2.2 Changement d'indice et phénomène télescopique

▷ **Exercice 2.5. Changement d'indice.**

1. Montrer les égalités suivantes en utilisant, au besoin un changement d'indice et éventuellement en découpant les sommes considérées :

$$\sum_{k=1}^{n}\Big((k+3)^3-(k-1)^3\Big)=n^3+(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3-36\,,\quad\prod_{k=1}^{n}(e^{k+3})^3=e^{\frac{3n(n+7)}{2}}\,,\quad\sum_{k=p}^{q}\pi^k=\pi^p\frac{1-\pi^{q-p+1}}{1-\pi}\,.$$

2. Caluler $S_n=\sum_{k=0}^{2n}(n-k)$ (on effectuera le changement d'indice $i=2n-k$) et $T_n=\sum_{k=0}^{2n}(n-k)^2$.

▷ **Exercice 2.6. Phénomène télescopique.** Simplifier, pour $n\geqslant 4$, l'expression $u_n=\sum_{k=2}^{n}3\ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right)$. La suite u admet-elle une limite ? Quelle est la limite de la suite $(u_n-6\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

▷ **Exercice 2.7. Suites télescopiques.**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies explicitement pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\text{ et }v_n=\prod_{k=1}^{n}(e^{-\frac{3}{k}})^{\frac{1}{k+1}}.$$

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad\frac{1}{k(k+1)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}.$$

2. En déduire l'expression simplifiée

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=1-\frac{1}{n+1},$$

préciser la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. En déduire la monotonie et la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

▷ **Exercice 2.8. Développement d'un cube et minoration télescopique.**
Soit u la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n^3$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n \geqslant 3$.
2. En déduire une minoration de v_n puis le fait que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ n \geqslant 2 \Rightarrow u_n \geqslant \sqrt[3]{3n}$$

▷ **Exercice 2.9.** Mettre sous forme sommatoire puis calculer explicitement en fonction de n la quantité suivante :

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \ldots + (-1)^n(2n+1).$$

On pourra distinguer deux cas selon la parité de n.

3 Sommes doubles

▷ **Exercice 3.1. Calculs explicites**
Expliciter en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes suivantes :

$$1)\ a_n = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} 9^{i+j} \qquad 2)\ b_n = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} i\ln(j+1) \qquad 3)\ c_n = \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} 2i^2 9^j \qquad 4)\ d_n = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2n\\ 1\leqslant j\leqslant 3n}} (i^2+1)$$

$$5)\ e_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{i+j} \qquad 6)\ f_n = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2^{i+j} \qquad 7)\ g_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i^3}{(j+1)^2} \qquad 8)\ h_n = \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3n} 4^{\frac{i^2}{j(j+1)}}$$

▷ **Exercice 3.2. Permutation des symboles sommatoires.**
Démontrer les égalités suivantes :

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}.$$

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{k=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k-i} + \sum_{k=n+2}^{2n}\sum_{i=k-n}^{n} a_{i,k-i} = \sum_{k=2}^{2n}\sum_{i=\max(1,k-n)}^{\min(k-1,n)} a_{i,k-i}$$

et interpréter graphiquement leur signification.
En déduire les égalités suivantes :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \frac{1}{i+j} = 1 - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + (2n+1)\sum_{k=n+2}^{2n}\frac{1}{k}\ ,$$

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} ij = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1).$$

▷ **Exercice 3.3.** $\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. En observant que $\sum_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} ij$ peut se décomposer en le produit de deux sommes car le terme sommé est le produit de deux termes, l'un ne dépendant que de i, l'autre que de j, montrer que

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} ij = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$

2. Posons, pour tout $s \in [\![1,n]\!]$, $E_s = \left(\bigcup_{j=1}^{s}\{(s,j)\}\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{s-1}\{(k,s)\}\right)$. Représenter sur le carré quadrillé $[\![1,n]\!]^2$, les ensembles E_1, E_2, …, E_n. Relier les ensembles $[\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$ et $\bigcup_{s=1}^{n} E_s$, puis montrer que

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} ij = \sum_{i=1}^{n} i^3.$$

En déduire que la somme des cubes des n premiers entiers est égale au carré de la somme des n premiers entiers.

▷ **Exercice 3.4.**

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} ij$.
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$.
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$.
4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{\substack{i+j=n\\ (i,j)\in\mathbb{N}^2}} ij$ puis en déduire $\sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2\\ i+j\leqslant n}} ij$.

▷ **Exercice 3.5. Stabilité des matrices stochastiques par produit.**
Soient $(a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ et $(b_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ deux familles de n^2 nombres complexes ($n \in \mathbb{N}^*$) tels que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = 1.$$

La famille $(c_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ est définie, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ par

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Démontrer que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} = 1.$$

Que vient-on de prouver ?

4 Suites définies avec des symboles sommatoires

▷ **Exercice 4.1.**
Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$.

1. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. En utilisant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$, montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1. En adaptant la technique proposée, montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $\frac{3}{4}$.
3. Que dire de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

▷ **Exercice 4.2. Sommation par tranches**
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2i(2i-1)} + \frac{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n}.$$

On pourra distinguer les cas $n \equiv 0[2]$ ($\exists p \in \mathbb{N}^* : n = 2p$) et $n \equiv 1[2]$ ($\exists p \in \mathbb{N} : n = 2p+1$).

▷ **Exercice 4.3.** $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$
Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$A_n = B_n - B_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

2. En admettant qu'il existe deux constantes $(C, D) \in \mathbb{R}_+^2$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(n) + C - \frac{D}{n} \leqslant B_n \leqslant \ln(n) + C + \frac{D}{n},$$

montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$,

$$\ln 2 - \frac{(3n-1)D}{n(n-1)} \leqslant A_n \leqslant \ln\Big(\frac{2n}{n-1}\Big) + \frac{(3n-1)D}{n(n-1)}.$$

On pourra utiliser le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n-1}{2} \leqslant \lfloor \dfrac{n}{2} \rfloor \leqslant \dfrac{n}{2}$.

3. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Applications à la simplification d'expressions données par une formule sommatoire.

▷ **Exercice 4.4. Une technique standard.**

1. Considérons une suite complexe $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et la suite de fonctions polynomiales associées : $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

   Montrer que l'on peut donner une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^{n} k a_k x^k$ à partir $f_n(x)$ (on pourra calculer la dérivée de la fonction $f_n(x)$).

2. Montrer que l'on peut donner une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ à partir de $f_n(x)$.

3. Application au calcul des sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = 2(2^n(n-1)+1) \ , \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k.2^k} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-t^n}{1-t} dt \ , \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1).2^k} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{u^2} \int_0^u \frac{t(1-t^n)}{1-t} .dt \right) du.$$

Correction des exercices

▷ Corrigé de l'exercice 1.1

1. Dans $[\![9, 2017]\!]$, il y a $2017 - 9 + 1 = 2009$ entiers.
2. Dans $[\![9, 2017]\!]$, il y a $(2009-1)/2+1 = 1004$ entiers pairs (les extrémités étant impaires, il y a un nombre impair de plus !).
3. Dans $[\![9, 2017]\!]$, il y a $2009 - 1004 = 1005$ entiers impairs.

▷ Corrigé de l'exercice 1.2

1. $\{k \in [\![0, 5n]\!] \mid k \equiv -1 \ [5]\} = \{5i + 4 \mid i \in [\![0, n-1]\!]\}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 5n \\ k \equiv -1 \ [5]}} k \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (5i+4) \\ &= 5\sum_{i=0}^{n-1} i + 4\sum_{i=0}^{n-1} 1 \\ &= 5 \times \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + 4n \\ &= \frac{n(5n+3)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 5n \\ k \equiv -1 \ [5]}} k^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (5i+4)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (25i^2 + 40i + 16) \\ &= 25\sum_{i=0}^{n-1} i^2 + 40\sum_{i=0}^{n-1} i + 16\sum_{i=0}^{n-1} 1 \\ &= 25 \times \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} + 40 \times \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + 16n \\ &= 25 \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 120 \times \frac{(n-1)n}{6} + \frac{96n}{6} \\ &= \frac{n}{6}\left[(n-1)(25(2n-1)+120)+96\right] \\ &= \frac{n}{6}\left[5(n-1)(10n+19)+96\right] \\ &= \frac{n(50n^2+45n+1)}{6} \end{aligned}$$

▷ Corrigé de l'exercice 1.3

1. $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ donc la raison r vaut $r = u_1 - u_0 = 3$ donc $u_4 = u_0 + 4r = 2 + 4 \times 3 = 14$.
2. $u_0 = 3$, $u_1 = -6$ donc la raison q vaut $q = \dfrac{u_1}{u_0} = -2$ donc $u_4 = u_0(-2)^4 = 3 \times 16 = 48$.

▷ Corrigé de l'exercice 1.4

1. La suite constante de valeur 3 est la suite arithméthique de raison 0 et de premier terme 3. C'est aussi la suite géométrique de raison 1 et de premier terme 3.
2. On a $u_2 - u_1 = 3$ et $u_1 - u_0 = 1$ donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ donc u n'est pas arithmétique.
   On a $\dfrac{u_2}{u_1} = 4$ et $\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{9}{4}$ donc $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_3}{u_2}$ donc u n'est pas géométrique.
3. u est la suite géométrique de raison -5 et de premier terme $\dfrac{1}{10}$.

4. On a aussi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 10 \times \left(\dfrac{-5}{10}\right)^n$ donc u est la suite géométrique de raison $-\dfrac{5}{10}$ et de premier terme 10.
5. On a aussi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6n + 30$ donc u est la suite arithméthique de raison 6 et de premier terme 30.
6. On a aussi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-6) \times \left(-\dfrac{2^3}{3^2}\right)^n$ donc u est la suite géométrique de raison $-\dfrac{8}{9}$ et de premier terme -6.

▷ Corrigé de l'exercice 1.5

Notons $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{G}$, $\mathcal{C}$) les suites arithmétiques (resp. géométriques, constantes) de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- **Analyse, condition nécessaire.**
  Soit $u \in \mathcal{A} \cap \mathcal{G}$ fixée quelconque.
  Alors
  ⋆ $u \in \mathcal{A}$ donc il existe $r \in \mathbb{K}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$,
  ⋆ $u \in \mathcal{G}$ donc il existe $q \in \mathbb{K}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$.
  Appliquons les deux expressions ci-dessus pour exprimer u_1 et u_2 :
  $$u_1 = u_0 + r = u_0 q \quad \text{et} \quad u_2 = u_0 + 2r = u_0 q^2 \ .$$
  Par conséquent, $\begin{cases} u_0 + r = u_0 q & (1) \\ u_0 + 2r = u_0 q^2 & (2) \end{cases}$
  En effectuant $2 \times (1) - (2)$, on obtient
  $$u_0 = (2q - q^2)u_0$$
  donc $(1 - 2q + q^2)u_0 = 0$ soit aussi $(1-q)^2 u_0 = 0$ si bien que $1 - q = 0$ ou $u_0 = 0$.
  ⋆ Si $1 - q = 0$ alors $q = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n = u_0$ donc la suite u est constante.
  ⋆ Si $u_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n = 0$ donc la suite u est constante.
  Ainsi, $\mathcal{A} \cap \mathcal{G} \subset \mathcal{C}$.
- **Synthèse, condition suffisante.**
  Soit $u \in \mathcal{C}$ fixée quelconque.
  Par définition de $\mathcal{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$.
  D'une part, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_0 - u_0 = 0$ donc la suite u est arithmétique.
  D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 = 1 \times u_0 = 1 \times u_n$ donc la suite u est géométrique.
  Par conséquent, $u \in \mathcal{A} \cap \mathcal{G}$.
  Ainsi, $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{G}$.

Ainsi, $\mathcal{A} \cap \mathcal{G} = \mathcal{C}$.

▷ Corrigé de l'exercice 1.6

Il faut trouver le plus petit entier n tel que $1,02^n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} 1,02^n \geqslant 2 &\iff n \ln(1,02) \geqslant \ln 2 \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln 2}{\ln(1,02)} \\ &\iff n \geqslant 35,003... \end{aligned}$$

```
>>> import numpy as np
>>> np.log(2)/np.log(1.02)
35.002788781146499
```

Un somme investie dans ce placement a doublé en 36 ans (mais pas en 35 ans !).

▷ Corrigé de l'exercice 1.7

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

$$v_{n+1} = 2 - u_{n+1} = 2 - \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right) = 1 - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(2 - u_n) = \frac{1}{2}v_n$$

donc v est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 2 - u_0 = 1$ si bien que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ v_n = \frac{1}{2^n}$$

On en déduit, puisque $v_n = 2 - u_n \iff u_n = 2 - v_n$, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n = 2 - \dfrac{1}{2^n}.}$

▷ **Corrigé de l'exercice 1.8**

- **Cas $\lambda = 1$.**
  - ⋆ On a donc $u_1 = u_0^\alpha$, $u_2 = u_1^\alpha = u_0^{\alpha^2}$, $u_3 = u_2^\alpha = u_0^{\alpha^3}$, ... d'où la conjecture
$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = u_0^{(\alpha^n)} = \exp(\alpha^n \ln u_0)$$
On peut alors démontrer ce résultat par récurrence en considérant la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$\mathcal{P}(n)\ :\ \text{« } u_n = \exp(\alpha^n \ln u_0) \text{ ».}$$
  - ⋆ **Autre approche.** On peut démontrer par récurrence en considérant la propriété $\mathcal{Q}(\cdot)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$\mathcal{Q}(n)\ :\ \text{« } u_n > 0 \text{ ».}$$
que la suite est à termes strictement positifs. Cela permet de considérer v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$v_n = \ln(u_n)$$
On observe alors que
$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n^\alpha) = \alpha \ln u_n = \alpha v_n$$
donc v est la suite géométrique de raison α et de premier terme $\ln u_0$ si bien que
$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n = \alpha^n \ln u_0$$
d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = e^{v_n} = \exp(\alpha^n \ln u_0) = u_0^{(\alpha^n)}.}$
- **Cas général $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.**
On peut démontrer par récurrence en considérant la propriété $\mathcal{Q}(\cdot)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$\mathcal{Q}(n)\ :\ \text{« } u_n > 0 \text{ ».}$$
que la suite est à termes strictement positifs. Cela permet de considérer v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$v_n = \ln(u_n)$$
On observe alors que
$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\lambda + \alpha \ln u_n = \alpha v_n + \ln\lambda$$
La suite v est donc arithmético-géométrique.
Cherchons une constante ℓ de sorte que $(v_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite géométrique : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} v_{n+1} - \ell &= \alpha v_n + \ln\lambda - \ell \\ &= \alpha\left(v_n - \frac{\ell - \ln\lambda}{\alpha}\right) \end{aligned}$$
donc si l'on choisit ℓ de sorte que
$$\frac{\ell - \ln\lambda}{\alpha} = \ell$$
ce sera gagné car on aura $v_{n+1} - \ell = \alpha(v_n - \ell)$.
Or
$$\frac{\ell - \ln\lambda}{\alpha} = \ell \iff (1-\alpha)\ell = \ln\lambda$$
  - ⋆ **Si $\alpha = 1$,** la suite u vérifie
$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = \lambda u_n$$
si bien qu'une récurrence immédiate permet de prouver que
$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = \lambda^n u_0$$
  - ⋆ **Si $\alpha \neq 1$,** on pose $\ell = \dfrac{\ln\lambda}{1-\alpha}$, la suite $(v_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison α et de premier terme $\ln u_0 - \ell$ donc
$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n - \ell = \alpha^n(\ln u_0 - \ell)$$
si bien que
$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \ln u_n - \ell = \alpha^n(\ln u_0 - \ell)$$
d'où
$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = \exp\left[\alpha^n\left(\ln u_0 - \frac{\ln\lambda}{1-\alpha}\right)\right] \times \exp\frac{\ln\lambda}{1-\alpha} = \frac{u_0^{\alpha^n}}{\lambda^{\frac{\alpha^n}{1-\alpha}}}\lambda^{\frac{1}{1-\alpha}} = u_0^{\alpha^n}\lambda^{\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}}$$

▷ Corrigé de l'exercice 1.9

1. Rappelons que $2^{12} = 4096$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{4096} \\ &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{12}} \\ &= \frac{1}{2^3}\left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \ldots + \frac{1}{2^9}\right) \\ &= \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{9}\frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right) \\ &= \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{12}} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} B &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{4096} \\ &= \frac{1}{2^0} - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{12}} \\ &= \sum_{k=0}^{12}\frac{(-1)^k}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{13}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2^{13}}\right) \end{aligned}$$

3. Rappelons que $2^6 = 64$.

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + 4 + \ldots + 64 + 64\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^3 + \sqrt{2}^4 + \ldots + \sqrt{2}^{12} + \sqrt{2}^{13} \\ &= \sum k = 1^{13}\sqrt{2}^k \\ &= \sqrt{2} \times \frac{1 - \sqrt{2}^{13}}{1 - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

or, en multipliant par l'expression conjuguée, $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{1-2} = -(1+\sqrt{2})$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2}^{13} - 1) \\ &= (\sqrt{2} + 2)(2^6\sqrt{2} - 1) \\ &= 2^7 - 2 + (2^7 - 1)\sqrt{2} \end{aligned}$$

▷ Corrigé de l'exercice 1.10

Observons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{10\ldots01}_{n \text{ zéros}} = 10^{n+1} + 1$$

donc

$$\begin{aligned} S_n &= 1+\sum_{k=0}^{n}(10^{k+1}+1) \\ &= 1+10\sum_{k=0}^{n}10^k+\sum_{k=0}^{n}1 \\ &= 1+10\times\frac{1-10^{n+1}}{1-10}+n+1 \\ &= n+2+\frac{10}{9}(10^{n+1}-1) \\ &= n+\frac{8}{9}+\frac{10^{n+2}}{9} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n = 1+11+101+1001+\ldots+\underbrace{10\ldots01}_{n \text{ zéros}} = n+\frac{8}{9}+\frac{10^{n+2}}{9}$.

▷ **Corrigé de l'exercice 1.11**

1. Connaissant la raison et le premier terme de u,

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_n = u_0+nr$$

Soient $(m,p)\in\mathbb{N}^2$ tels que $m\leqslant p$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{p}u_k &= \sum_{k=m}^{p}(u_0+kr) \\ &= \sum_{k=m}^{p}u_0+r\sum_{k=m}^{p}k \\ &= (p-m+1)u_0+r\left(\sum_{k=0}^{p}k-\sum_{k=0}^{m-1}k\right) \\ &= (p-m+1)u_0+r\left(\frac{p(p+1)}{2}-\frac{(m-1)m}{2}\right) \\ &= (p-m+1)u_0+\frac{r}{2}\underbrace{(p^2+p-m^2+m)}_{\begin{array}{r}=p^2-m^2+p+m\\=(p-m)(p+m)+(p+m)\end{array}} \\ &= (p-m+1)u_0+\frac{r}{2}(p+m)(p-m+1) \\ &= (p-m+1)\left(u_0+\frac{p+m}{2}r\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=m}^{p}u_k = (p-m+1)\left(u_0+\frac{p+m}{2}r\right)$.

De plus,

$$u_0+\frac{p+m}{2}r = \frac{u_0+u_0+pr+mr}{2} = \frac{\overbrace{u_0+mr}^{=u_m}+\overbrace{u_0+pr}^{=u_p}}{2} = \frac{u_m+u_p}{2}$$

d'où Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=m}^{p}u_k = (p-m+1)\frac{u_m+u_p}{2}$.

2. Connaissant la raison et le premier terme de v,

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ v_n = v_0q^n$$

Soient $(m,p)\in\mathbb{N}^2$ tels que $m\leqslant p$.

⋆ Si $q = 1$, v est la suite constante de valeur v_0 donc

$$\sum_{k=m}^{p} v_k = (p - m + 1)v_0$$

⋆ Sinon $q \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{p} v_k &= \sum_{k=m}^{p} v_0 q^k \\
&= v_0 q^m \sum_{k=m}^{p} q^{k-m} \\
&= \underbrace{v_0 q^m}_{= v_m} \sum_{i=0}^{p-m} q^i \quad \text{en posant } i = k - m \\
&= v_m \times \frac{1 - q^{p-m+1}}{1 - q} \quad \text{car } q \neq 1
\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=m}^{p} v_k = v_m \times \frac{1 - q^{p-m+1}}{1 - q}$.

De plus,

$$v_m - v_{p+1} = v_0 q^m - v_0 q^{p+1} = v_0 q^m (1 - q^{p-m+1}) = v_m (1 - q^{p-m+1})$$

si bien que $\displaystyle\sum_{k=m}^{p} v_k = \frac{v_m - v_{p+1}}{1 - q}$.

▷ Corrigé de l'exercice 1.12

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (3k) = \left(\prod_{k=1}^{n} 3\right)\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) = 3^n n!$.
2. $\displaystyle\prod_{k=3}^{3n+1} \frac{2}{k+1} = \frac{\displaystyle\prod_{k=3}^{3n+1} 2}{\displaystyle\prod_{k=3}^{3n+1} (k+1)} = \frac{2^{3n-1}}{\displaystyle\prod_{j=4}^{3n+2} j} = \frac{3 \times 8^n}{(3n+2)!}$.
3. $\displaystyle\prod_{k=3}^{n^2} (3ke^{k+1}) = \left(\prod_{k=3}^{n^2} 3\right)\left(\prod_{k=3}^{n^2} k\right)\left(\prod_{k=3}^{n^2} e^{k+1}\right) = 3^{n^2-2} \frac{(n^2)!}{1 \times 2} \exp\left(\sum_{j=4}^{n^2+1} j\right) = \frac{3^{n^2}(n^2)!}{18} \exp\left(\frac{(n^2+5)(n^2-2)}{2}\right)$.
4. $\displaystyle\prod_{k=3}^{n+1} \frac{(k+1)(k-1)}{2} = \left(\prod_{k=3}^{n+1} \frac{1}{2}\right)\left(\prod_{k=3}^{n+1} (k+1)\right)\left(\prod_{k=3}^{n+1} (k-1)\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\prod_{k=4}^{n+2} j\right)\left(\prod_{k=2}^{n} j\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(n+2)!}{1 \times 2 \times 3} \frac{(n)!}{1} = \frac{n!(n+2)!}{3 \times 2^n}$.
5. $\displaystyle\prod_{k=3}^{n+1} \frac{(k+1)}{2(k-1)} = \left(\prod_{k=3}^{n+1} \frac{1}{2}\right) \frac{\displaystyle\prod_{k=3}^{n+1} (k+1)}{\displaystyle\prod_{k=3}^{n+1} (k-1)} = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\displaystyle\prod_{j=4}^{n+2} j}{\displaystyle\prod_{j=2}^{n} j} = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\displaystyle\prod_{j=4}^{n} j \prod_{j=n+1}^{n+2} j}{\displaystyle\prod_{j=2}^{3} j \prod_{j=4}^{n} j} = \frac{(n+1)(n+2)}{3 \times 2^n}$.

▷ Corrigé de l'exercice 1.13

1. $A_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!$.
2. $B_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k+1) = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k) \prod_{k=1}^{n} (2k+1)}{A_n} = \frac{(2n+1)!}{A_n} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

▷ Corrigé de l'exercice 2.1

1. Il s'agit de la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison -3 et de premier terme -3 :

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n}(-3)^k \\ &= -3 \times \frac{1-(-3)^n}{1-(-3)} \\ &= \frac{3}{4}((-3)^n - 1) \end{aligned}$$

2. Il s'agit de la somme des $n+3$ premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1 :

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=0}^{n+2} 2^{-k} \\ &= \frac{1-\frac{1}{2^{n+3}}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2\left(1-\frac{1}{2^{n+3}}\right) \\ &= 2-\frac{1}{2^{n+2}} \end{aligned}$$

3. La première idée qui vient à l'esprit consiste à faire apparaître un phénomène télescopique.

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=2}^{n+2}(2^{k+1}-2^{k-1}) \\ &= \sum_{k=2}^{n+2} 2^{k+1} - \underbrace{\sum_{k=2}^{n+2} 2^{k-1}}_{=\sum_{j=0}^{n} 2^{j+1}} \\ &\qquad \text{en posant } j = k-2 \\ &= \sum_{k=2}^{n} 2^{k+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} - 2^1 - 2^2 - \sum_{j=2}^{n} 2^{j+1} \\ &= \underbrace{2^{n+2}+2^{n+3}}_{=2^{n+2}(1+2)} - 6 \\ &= 3 \times 2^{n+2} - 6 \\ &= 6(2^{n+1}-1) \end{aligned}$$

Une deuxième idée consiste à calculer explicitement les deux sommes géométriques :

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=2}^{n+2}(2^{k+1}-2^{k-1}) \\ &= \underbrace{\sum_{k=2}^{n+2} 2^{k+1}}_{=2^3 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2}} - \underbrace{\sum_{k=2}^{n+2} 2^{k-1}}_{=2^1 \frac{1-2^{n+1}}{1-2}} \\ &\qquad \begin{array}{cc} n+1 \text{ prem. termes de la suite géom} & n+1 \text{ prem. termes de la suite géom} \\ \text{raison 2 de prem. terme } 2^3 & \text{raison 2 de prem. terme } 2^1 \end{array} \\ &= 8(2^{n+1}-1) - 2(2^{n+1}-1) \\ &= 6(2^{n+1}-1) \end{aligned}$$

Une troisième idée consiste à observer que $2^{k+1}-2^{k-1} = 2^k(2-2^{-1}) = \frac{3}{2}2^k$ si bien que

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=2}^{n+2}(2^{k+1}-2^{k-1}) \\ &= \frac{3}{2}\sum_{k=2}^{n+2}2^k \\ &= \frac{3}{2}\times 2^2\frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\ &= 3\times 2(2^{n+1}-1) \\ &= 6(2^{n+1}-1) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} d_n &= \prod_{k=1}^{2n}2^{3k+1} \\ &= 2^{\sum_{k=1}^{2n}(3k+1)} \\ &= 2^{3\sum_{k=1}^{2n}k+\sum_{k=1}^{2n}1} \\ &= 2^{3\frac{2n(2n+1)}{2}+2n} \\ &= 2^{n(6n+5)} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} e_n &= \prod_{k=1}^{n}16^{k^3} \\ &= 16^{\sum_{k=1}^{n}k^3} \\ &= 16^{\frac{n^2(n+1)^2}{4}} \\ &= 2^{n^2(n+1)^2} \quad \text{car } 16^{\frac{1}{4}}=2. \end{aligned}$$

6. La somme est effectuée sur l'ensemble d'indices

$$I=\{k\in\mathbb{N}\mid 0\leqslant k\leqslant 3n,\ k\equiv 1[3]\}$$

qui peut aussi être décrit de la manière suivante

$$I=\{3i+1\in\mathbb{N}\mid 0\leqslant i\leqslant n-1\}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
f_n &= \sum_{\substack{k\equiv 1[3]\\ k\in[\![0,3n]\!]}} k^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(3i+1)^2 \\
&= 9 \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} i^2}_{=\frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6}=\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}} +6 \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} i}_{=\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} 1}_{=n} \\
&= n\left(\frac{3(n-1)(2n-1)}{2}+3(n-1)+1\right) \\
&= n\left((n-1)\left(3n-\frac{3}{2}+3\right)+1\right) \\
&= n\left((n-1)\left(3n+\frac{3}{2}\right)+1\right) \\
&= n\left(3n^2-\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
g_n &= \sum_{k=1}^{2n} \underbrace{(1+(-1)^k)}_{=\begin{cases} 0 & \text{si } k\equiv 1[2], \\ 2 & \text{si } k\equiv 0[3]. \end{cases}} k \\
&= \sum_{\substack{k\in[\![1,2n]\!]\\ k\equiv 0[2]}} 2k
\end{aligned}$$

La somme est effectuée sur l'ensemble d'indices

$$I=\{k\in\mathbb{N}\mid 1\leqslant k\leqslant 2n,\ k\equiv 0[2]\}$$

qui peut aussi être décrit de la manière suivante

$$I=\{2i\in\mathbb{N}\mid 0\leqslant i\leqslant n\}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
g_n &= \sum_{i=1}^{n} 2(2i) \\
&= 4\frac{n(n+1)}{2} \\
&= 2n(n+1)
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
h_n &= \prod_{k=1}^{n} \underbrace{2^{k(1-(-1)^k)}}_{=\begin{cases} 2^{2k} & \text{si } k\equiv 1[2], \\ 1 & \text{si } k\equiv 0[3]. \end{cases}} \\
&= \prod_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ k\equiv 1[2]}} 2^{k(1-(-1)^k)}
\end{aligned}$$

Le produit est effectué sur l'ensemble d'indices

$$I=\{k\in\mathbb{N}\mid 1\leqslant k\leqslant n,\ k\equiv 1[2]\}$$

qui peut aussi être décrit de la manière suivante

$$I = \begin{cases} \left\{2i+1 \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant i \leqslant \dfrac{n}{2}-1\right\} & \text{si } n \equiv 0[2], \\ \left\{2i+1 \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant i \leqslant \dfrac{n-1}{2}\right\} & \text{si } n \equiv 1[2], \end{cases}$$

si bien que

- si $n \equiv 0[2]$,

$$\begin{aligned} h_n &= \prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} 2^{2(2i+1)} \\ &= 2^{4\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} i + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} 2} \\ &= 2^{2(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2})+2\frac{n}{2}} \\ &= 2^{\frac{n^2}{2}} \end{aligned}$$

- si $n \equiv 1[2]$,

$$\begin{aligned} h_n &= \prod_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} 2^{2(2i+1)} \\ &= 2^{4\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} i + \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} 2} \\ &= 2^{2(\frac{n-1}{2}+1)(\frac{n-1}{2})+2\left(\frac{n-1}{2}+1\right)} \\ &= 2^{\frac{(n+1)^2}{2}} \end{aligned}$$

▷ Corrigé de l'exercice 2.2

1.

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n}(1+2\ln k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \ln k \\ &= n + 2\ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) \\ &= n + 2\ln(n!) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} b_n &= \prod_{k=1}^{n}(-2\sqrt{k}) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n} -1\right)\left(\prod_{k=1}^{n} 2\right)\left(\prod_{k=1}^{n} \sqrt{k}\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n} -1\right)\left(\prod_{k=1}^{n} 2\right)\sqrt{\prod_{k=1}^{n} k} \\ &= (-1)^n \times 2^n \times \sqrt{n!} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
c_n &= \sum_{k=2}^{n} (\ln(k^2-1) - \ln(k+1)) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln \underbrace{\frac{k^2-1}{k+1}}_{=k-1} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) \\
&= \ln \left(\underbrace{\prod_{k=2}^{n} (k-1)}_{\text{en posant } j=k-1} \right) \\
&= \ln((n-1)!)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
d_n &= \prod_{k=1}^{2n} (2k+1) \\
&= \prod_{k=1}^{2n} (2k+1) \times \frac{\prod_{k=1}^{2n} (2k)}{\prod_{k=1}^{2n} (2k)} \\
&= \frac{(4n+1)!}{2^{2n} \prod_{k=1}^{2n} k} \\
&= \frac{(4n+1)!}{2^{2n}(2n)!}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
e_n &= \prod_{k=2}^{n} (3k+6) \\
&= \prod_{k=2}^{n} (3(k+2)) \\
&= \left(\prod_{k=2}^{n} 3 \right) \underbrace{\left(\prod_{k=2}^{n} (k+2) \right)}_{\substack{=\prod_{j=4}^{n+2} j \\ \text{en posant } j=k+2}} \\
&= 3^{n-1} \times \frac{(n+2)!}{1 \times 2 \times 3} \\
&= \frac{3^{n-2}(n+2)!}{2}
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
f_n &= \prod_{k=-n-1}^{n}(2k+1) \\
&= \left(\prod_{k=-n-1}^{-1}(2k+1)\right)\left(\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\right) \\
&= \left(\prod_{j=1}^{n+1}(-2j+1)\right)\left(\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\right) \quad \text{en posant } j=-k \text{ dans le premier produit} \\
&= \left((-1)^{n+1}\prod_{j=1}^{n+1}(2j-1)\right)\left(\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\right) \\
&= \left((-1)^{n+1}\prod_{i=0}^{n}(2(i+1)-1)\right)\left(\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\right) \quad \text{en posant } i=j-1 \text{ dans le premier produit} \\
&= (-1)^{n+1}\left(\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\right)^2
\end{aligned}$$

Or

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \prod_{k=0}^{n}(2k+1)\times\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n+1)!}{2^n\prod_{k=1}^{n}k} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

donc $\boxed{f_n = (-1)^{n+1}\dfrac{(2n+1)!^2}{2^{2n}n!^2}.}$

7. Ramenons-nous au produit f_n calculé précédemment :

$$\begin{aligned}
g_n &= \frac{1}{(2n+1)}\prod_{k=-n}^{n}(2k+1) \\
&= -\frac{1}{(2n+1)^2}\times(-2n-1)\times\prod_{k=-n}^{n}(2k+1) \\
&= -\frac{1}{(2n+1)^2}\times(2(-n-1)+1)\times\prod_{k=-n}^{n}(2k+1) \\
&= -\frac{1}{(2n+1)^2}\prod_{k=-n-1}^{n}(2k+1) \\
&= -\frac{1}{(2n+1)^2}(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!^2}{2^{2n}n!^2} \quad \text{en utilisant le calcul de } f_n \\
&= (-1)^n\frac{(2n)!^2}{2^{2n}n!^2}
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
h_n &= \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left((6k+3)^2 3^{\frac{2k}{n+1}}\right)} \\
&= \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(9(2k+1)^2 3^{\frac{2k}{n+1}}\right)} \\
&= \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} 9}\sqrt[n]{\left(\prod_{k=1}^{n}(2k+1)\right)^2}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} 3^{\frac{2k}{n+1}}} \\
&= \sqrt[n]{9^n}\sqrt[n]{\left(\prod_{k=1}^{n}(2k+1)\right)^2}\sqrt[n]{3^{\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n+1}}} \\
&= \sqrt[n]{9^n}\sqrt[n]{\left(\prod_{k=1}^{n}(2k+1)\right)^2}\sqrt[n]{3^{\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n+1}}} \\
&= 9\times\left(\frac{(2n+1)!}{2^n n!}\right)^{\frac{2}{n}}\sqrt[n]{3^{\frac{2}{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2}}} \\
&= \frac{9}{4}\times\left(\frac{(2n+1)!}{n!}\right)^{\frac{2}{n}}\sqrt[n]{3^n} \\
&= \frac{27}{4}\left(\frac{(2n+1)!}{n!}\right)^{\frac{2}{n}}
\end{aligned}$$

▷ Corrigé de l'exercice 2.3

$$\sum_{k=1}^{2006}k^6=\sum_{n=1}^{1789}n^6+\sum_{j=1790}^{2006}j^6=\sum_{\substack{p=1\\p\equiv 1[2]}}^{2006}(p)^6+\sum_{\substack{p=1\\p\equiv 0[2]}}^{2006}p^6=\sum_{n=0}^{1002}(2n+1)^6+\sum_{n=1}^{1003}(2n)^6=\sum_{n=1}^{668}(3n)^6+\sum_{n=0}^{668}(3n+1)^6+\sum_{n=0}^{668}(3n+2)^6.$$

$$\sum_{k=1}^{2007}k^6=\sum_{n=1}^{669}(3n)^6+\sum_{n=0}^{668}(3n+1)^6+\sum_{n=0}^{668}(3n+2)^6 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{2n}e^{n^2}=2ne^{n^2} \quad ; \quad \exp\left(\sum_{k=1}^{n+2}(2k+1)\right)=\prod_{\substack{p=3\\p\equiv 1[2]}}^{2n+5}e^p.$$

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{2n}(3+2k)\right)=\exp(6n)\left(\prod_{k=1}^{2n}e^k\right)^2;$$

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{2n}(3+2k)\right)=\exp(4n^2+8n) \text{ car } \sum_{k=1}^{2n}(3+2k)=3\times 2n+2\sum_{k=1}^{2n}k=6n+2\times\frac{(1+2n)2n}{2}=4n^2+8n$$

$$\ln\left(\prod_{k=2}^{2n}k^2\right)=2\sum_{k=2}^{2n}\ln(k)$$

$$\frac{n^2}{2n}+\frac{(n+1)^2}{2n+1}+\frac{(n+2)^2}{2n+2}+\ldots+\frac{4n^2}{3n}=\sum_{k=n}^{2n}\frac{k^2}{k+n}=\sum_{l=2n}^{3n}\frac{(l-n)^2}{l}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(n-1+k)^2}{2n-1+k}=\sum_{i=0}^{n}\frac{(n+i)^2}{2n+i}$$

$$=\sum_{k=0}^{3n}\frac{k^2}{k+n}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{k+n}-\sum_{k=2n+1}^{3n}\frac{k^2}{k+n}.$$

$$\ln\left(\frac{(4n)!^2}{(2n)!^2}\right)=\ln\left(\prod_{k=2n+1}^{4n}k^2\right)=2\sum_{k=2n+1}^{4n}\ln(k) \quad ; \quad \sum_{k=1}^{2n}(\sqrt{k}+\sqrt{\pi})=2n\sqrt{\pi}+\sum_{k=1}^{2n}\sqrt{k}=2n\sqrt{\pi}+\sum_{\substack{k=1\\k\equiv 1[2]}}^{2n}\sqrt{k}+\sum_{\substack{k=1\\k\equiv 0[2]}}^{2n}\sqrt{k}.$$

$$\ln\left(\prod_{\substack{k=1\\k\equiv 0[3]}}^{3n}k\right)=\sum_{p=1}^{n}\ln(3p)=n\ln 3+\sum_{p=1}^{n}\ln(p)=\ln(3^n(n!)) \; ; \frac{(4n)!(5n)!}{(2n-1)!(3n+1)!}=\prod_{k=3n+2}^{4n}k\prod_{k=2n}^{5n}k=\left(\prod_{k=3n}^{4n}k\right)^2\frac{\prod_{k=4n+1}^{5n}k\prod_{k=2n}^{3n-1}k}{3n(3n+1)}$$

$$\prod_{p=1}^{n}\frac{2p+1}{p}=\frac{\prod_{p=1}^{n}(2p)\prod_{p=1}^{n}(2p+1)}{2^n(n!)^2}=\frac{(2n+1)!}{2^n(n!)^2};$$

$$\prod_{p=1}^{2n+1}e^{p^2-3p-2}=\exp(-4n-2)\prod_{p=1}^{2n+1}e^{p^2}\prod_{i=1}^{2n+1}e^{-3i}=\exp(-4n-2)\exp(\frac{1}{6}(2n+1)(2n+2)(4n+3))\exp(-3(n+1)(2n+1)).$$

$$\prod_{p=0}^{2n+1}e^{p}=\exp\Big(\sum_{p=0}^{2n+1}p\Big)=\exp\Big((n+1)(2n+1)\Big)\quad;$$

$$\prod_{p=0}^{2n+1}e^{p}=\prod_{\substack{p=0\\p\equiv 0[2]}}^{2n+1}e^{p}\prod_{\substack{p=0\\p\equiv 1[2]}}^{2n+1}e^{p}=\prod_{p=0}^{n}e^{2p}\prod_{p=0}^{n}e^{2p+1}=\Big(\prod_{p=0}^{n}e^{p}\Big)^4e^{n+1}=\exp\left(\frac{n(n+1)}{2}\times 4\right)e^{n+1}=\exp\Big((n+1)(2n+1)\Big).$$

▷ Corrigé de l'exercice 2.4

Montrons, par récurrence, la relation cherchée.
Considérons la propriété définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par

$$\mathcal{P}(n)\ :\ \text{“}\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2\text{“}$$

- Pour $n=1$,
  - $\star\ \displaystyle\sum_{k=1}^{1}k^3=1^3=1,$
  - $\star\ \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}=1,$
  - $\star\ \displaystyle\left(\sum_{k=1}^{1}k\right)^2=(1)^2=1$

  donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}k^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}=\left(\sum_{k=1}^{1}k\right)^2$ si bien que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}k^3&=\sum_{k=1}^{n}k^3+(n+1)^3\\&=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3\quad\text{car }\mathcal{P}(n)\text{ est vraie}\\&=\frac{(n+1)^2}{4}\left(\underbrace{n^2+4(n+1)}_{=(n+2)^2}\right)\\&=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

De plus, nous savons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ si bien que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ si bien que la formule prouvée précédemment donne

$$\sum_{k=1}^{n+1}k^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=\left(\sum_{k=1}^{n+1}k\right)^2$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

▷ Corrigé de l'exercice 2.5

1.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\Big((k+3)^3-(k-1)^3\Big) &= \sum_{k=1}^{n}(k+3)^3-\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3\\ &= \sum_{j=4}^{n+3}j^3-\sum_{q=0}^{n-1}q^3 \quad \text{en posant } j=k+3 \text{ et } q=k-1\\ &= -1-2^3-3^3+\sum_{j=1}^{n-1}j^3+n^3+(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3-\sum_{q=1}^{n-1}q^3\\ &= n^3+(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3-36\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}(e^{k+3})^3 &= \left(\prod_{k=1}^{n}e^{k+3}\right)^3\\ &= \left(\exp\left(\sum_{k=1}^{n}(k+3)\right)\right)^3\\ &= \left(\exp\left(\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3)\right)\right)^3\\ &= \left(\exp\left(\frac{n(n+1)}{2}+3n)\right)\right)^3\\ &= \exp\left(\frac{3n(n+7)}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q}\pi^k &= \pi^p\sum_{k=p}^{q}\pi^{k-p}\\ &= \pi^p\sum_{j=0}^{q-p}\pi^j \quad \text{en posant } j=k-p\\ &= \pi^p\frac{1-\pi^{q-p+1}}{1-\pi}\end{aligned}$$

2. (a) Effectuons le changement d'indice $i=2n-k$:

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{2n}(n-k)\\ &= \sum_{i=0}^{2n}(n-2n+i)\\ &= \sum_{i=0}^{2n}(i-n)\\ &= -\sum_{i=0}^{2n}(n-i)\\ &= -S_n\end{aligned}$$

si bien que $2S_n=0$ d'où $S_n=0$.

Autres méthodes :

- découper le terme à sommer

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n}(n-k) &= \sum_{k=0}^{2n}n-\sum_{k=0}^{2n}k\\ &= n(2n+1)-\frac{2n(2n+1)}{2}\\ &= 0\end{aligned}$$

- regrouper les sommes identiques

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n}(n-k) &= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)+0+\sum_{k=n+1}^{2n}(n-k)\\ &= \sum_{i=0}^{n} i+0+\sum_{j=0}^{n}(-j) \quad \text{en posant } i=n-k \text{ et } j=k-n\\ &= \sum_{i=0}^{n} i-\sum_{j=0}^{n} j\\ &= 0\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n}(n-k)^2 &= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)^2+0^2+\sum_{k=n+1}^{2n}(n-k)^2\\ &= \sum_{i=0}^{n} i^2+0+\sum_{j=0}^{n}(-j)^2 \quad \text{en posant } i=n-k \text{ et } j=k-n\\ &= 2\sum_{i=0}^{n} i^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}\end{aligned}$$

▷ **Corrigé de l'exercice 2.6**

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} 3\ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) &= 3\sum_{k=2}^{n}\Big(\ln(k+1)-\ln(k-1)\Big)\\ &= 3\left(\sum_{k=2}^{n}\ln(k+1)-\sum_{k=2}^{n}\ln(k-1)\right)\\ &= 3\left(\sum_{j=3}^{n+1}\ln(j)-\sum_{i=1}^{n-1}\ln(i)\right) \quad \text{en posant } j=k+1 \text{ et } i=k-1\\ &= 3\left(\sum_{j=3}^{n-1}\ln(j)+\sum_{j=n}^{n+1}\ln(j)-\sum_{i=1}^{2}\ln(i)-\sum_{i=3}^{n-1}\ln(i)\right)\\ &= 3\left(\ln(n)+\ln(n+1)-\ln(1)-\ln(2)\right)\\ &= 3\underbrace{\ln\left(\underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\substack{\longrightarrow\\ n\to+\infty}}+\infty\right)}_{\substack{\longrightarrow\\ n\to+\infty}}+\infty\end{aligned}$$

par composition des limites ($\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$)

On en déduit que la suite $\boxed{u \text{ diverge vers } +\infty.}$

Par ailleurs, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}u_n-6\ln n &= 3\ln\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-6\ln n\\ &= 3\ln\left(\frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{2}\right)-6\ln n\\ &= 3\ln(n^2)+3\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-3\ln 2-6\ln n\\ &= 3\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\substack{\longrightarrow\\ n\to+\infty}}0-3\ln 2\end{aligned}$$

par continuité de la fnct. ln en 1

si bien que $\boxed{\text{la suite } (u_n - 6\ln n) \text{ converge vers } -3\ln 2}$.

Une autre technique consiste à écrire

$$u_n - 6\ln n = 3\ln\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - 3\ln(n^2) = 3\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) = 3\ln\left(\underbrace{\frac{1+\frac{1}{n}}{2}}_{\substack{\longrightarrow \\ n\to+\infty}\ \frac{1}{2}}\right)$$

si bien que, par continuité de la fonction logarithme en $\frac{1}{2}$, cette suite converge vers $3\ln\frac{1}{2} = -3\ln 2$.

▷ Corrigé de l'exercice 2.7

1. (a) **Méthode 1 :**
$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{k(a+b)+a}{k(k+1)}$ si bien que pour avoir l'égalité

$$\forall k \in \mathbb{N}^*\ ,\ \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

il suffit de trouver $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 0 \\ a & & & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} a & & & = & 1 \\ & & b & = & -1 \end{array}\right.$$

Ainsi, $a = 1$ et $b = -1$ conviennent.

(b) **Méthode 2 : celle qui a ma préférence**
Après avoir effectué au brouillon et non sur la copie les calculs de la méthode 1, on écrit : posons $a = 1$ et $b = -1$ et calculons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}\ .$$

$$\boxed{\text{Par conséquent, } a = 1 \text{ et } b = -1 \text{ conviennent : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \quad \text{d'après la question précédente,} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \quad \text{en posant le changement d'indice } j = k+1 \\ &= 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}}_{=0} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = 1 - \frac{1}{n+1}.}$$

La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant strictement décroissante et de limite nulle, $\boxed{\text{la suite } u \text{ est croissante et } \lim u = 1}$.

3. Observons que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ v_n = \prod_{k=1}^{n} (e^{-\frac{3}{k}})^{\frac{1}{k+1}} = \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{3}{k(k+1)}} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} -\frac{3}{k(k+1)}\right) = e^{-3u_n}$$

si bien que

- la croissance de u et la décroissance de la fonction $x \mapsto e^{-3x}$ permettent de prouver que **la suite v est décroissante**
- la convergence de u vers 1 et la continuité de la fonction $x \mapsto e^{-3x}$ en 1 permettent de conclure que **v converge vers e^{-3}**.

▷ Corrigé de l'exercice 2.8

1. Une récurrence immédiate permet de prouver que la suite u est à termes positifs ou nuls en considérant la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathcal{P}(n)\ :\ \text{« } u_n \geqslant 0 \text{ »}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1}^3 - u_n^3 \\ &= \left(u_n + \frac{1}{u_n^2}\right)^3 - u_n^3 \\ &= u_n^3 + 3 + \frac{3}{u_n^3} + \frac{1}{u_n^6} - u_n^3 \\ &= 3 + \underbrace{\frac{3}{u_n^3} + \frac{1}{u_n^6}}_{\geqslant 0} \text{ car la suite } u \text{ est positive ou nulle} \\ &\geqslant 3 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n \geqslant 3$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $n \geqslant 2$.
Nous avons prouvé que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*\ ,\ v_{k+1} - v_k \geqslant 3$$

Sommons pour $k \in [\![2, n-1]\!]$ les inégalités ci-dessus :

$$\sum_{k=2}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \geqslant \underbrace{\sum_{k=2}^{n-1} 3}_{= 3(n-2)}$$

or

$$\sum_{k=2}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \underbrace{\sum_{k=2}^{n-1} v_{k+1}}_{= \sum_{i=3}^{n} v_i} - \sum_{k=2}^{n-1} v_k = v_n + \sum_{i=3}^{n-1} v_i - \sum_{k=3}^{n-1} v_k - v_2 = v_n - v_2$$

donc

$$v_n - v_2 \geqslant 3n - 6$$

or $v_2 = u_2^3 = \left(1 + \frac{1}{1^2}\right)^3 = 8$ d'où

$$v_n \geqslant 3n + 2 \geqslant 3n$$

donc $u_n = \sqrt[3]{v_n} \geqslant \sqrt[3]{3n}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2 \Rightarrow u_n \geqslant \sqrt[3]{3n}$.

Remarque : la sommation de la minoration télescopique de 2 à $n-1$ n'est pas très naturelle, la prmière idée consiste en général à sommer de 1 à $n-1$ ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ v_n - v_1 \geqslant 3(n-1)$$

or $v_1 = u_1^3 = 1$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ v_n \geqslant 3n-2$$

Cette minoration ne permet pas de minorer, pour $n \geqslant 2$, u_n par $\sqrt[3]{3n}$, elle aboutit à l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ u_n \geqslant \sqrt[3]{3n-2}$$

qui a l'avantage d'être valide pour tous les termes de la suite u.

▷ Corrigé de l'exercice 2.9

$$1-3+5-7+9-\ldots+(-1)^n(2n+1) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1) = \sum_{\substack{k=0\\k\equiv 0[2]}}^{n}(2k+1) - \sum_{\substack{k=0\\k\equiv 1[2]}}^{n}(2k+1)$$

Distinguons deux cas selon la parité de n :

- si $n = 2m$,

$$\begin{aligned}
1-3+5-7+9-\ldots+(-1)^n(2n+1) &= \sum_{\substack{k=0\\k\equiv 0[2]}}^{2m}(2k+1) - \sum_{\substack{k=0\\k\equiv 1[2]}}^{2m}(2k+1)\\
&= \sum_{p=0}^{m}(4p+1) - \sum_{p=0}^{m-1}(4p+3)\\
&= 4\left(\sum_{p=0}^{m}p\right) + m + 1 - 4\left(\sum_{p=0}^{m-1}p\right) - 3m\\
&= 4\frac{m(m+1)}{2} + m + 1 - 4\frac{m(m-1)}{2} - 3m\\
&= 2m+1
\end{aligned}$$

- si $n = 2m+1$,

$$\begin{aligned}
1-3+5-7+9-\ldots+(-1)^n(2n+1) &= \sum_{\substack{k=0\\k\equiv 0[2]}}^{n}(2k+1) - \sum_{\substack{k=0\\k\equiv 1[2]}}^{n}(2k+1)\\
&= \sum_{p=0}^{m}(4p+1) - \sum_{p=0}^{m}(4p+3)\\
&= 4\left(\sum_{p=0}^{m}p\right) + m + 1 - 4\left(\sum_{p=0}^{m}p\right) - 3(m+1)\\
&= 4\frac{m(m+1)}{2} + m + 1 - 4\frac{m(m+1)}{2} - 3(m+1)\\
&= -2(m+1)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1-3+5-7+9-\ldots+(-1)^n(2n+1) = \begin{cases} n+1 & \text{si } n \equiv 0[2] \\ -n-1 & \text{si } n \equiv 1[2] \end{cases} = (-1)^n(n+1)$.

▷ Corrigé de l'exercice 3.1

1.

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \underbrace{9^i}_{\text{indépendant de } j} 9^j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(9^i \sum_{j=1}^{n} 9^j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[9^i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} 9^j\right)}_{\text{indépendant de } i}\right] \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} 9^j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} 9^i\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} 9^j\right)^2 \\
&= \left(9\times\frac{1-9^n}{1-9}\right)^2 \\
&= \frac{81}{64}(9^n-1)^2
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
b_n &= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} i\ln(j+1) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=1}^{n}\ln(j+1)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i\ln\left(\prod_{j=1}^{n}(j+1)\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i\ln((n+1)!)\right) \\
&= \ln((n+1)!)\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{n(n+1)\ln((n+1)!)}{2}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
c_n &= \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}\underbrace{2i^2}_{\text{indépendant de } j}\ 9^j\right)\\
&= \prod_{i=1}^{n}\left(i^{2n}\ \underbrace{2^n\prod_{j=1}^{n}9^j}_{\text{indépendant de } i}\right)\\
&= (2^n)^n\times\left(\prod_{j=1}^{n}9^j\right)^n\times\left(\prod_{i=1}^{n}i^{2n}\right)\\
&= (2^n)^n\times\left(9^{n\sum_{j=1}^{n}j}\right)\times\left(\prod_{i=1}^{n}i\right)^{2n}\\
&= 2^{n^2}9^{\frac{n^2(n+1)}{2}}(n!)^{2n}\\
&= 2^{n^2}3^{n^2(n+1)}(n!)^{2n}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
d_n &= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2n\\ 1\leqslant j\leqslant 3n}}(i^2+1)\\
&= \sum_{i=1}^{2n}\left(\sum_{j=1}^{3n}\underbrace{(i^2+1)}_{\text{indépendant de } j}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{2n}\left((i^2+1)\sum_{j=1}^{3n}1\right)\\
&= \sum_{i=1}^{2n}3n(i^2+1)\\
&= 3n\sum_{i=1}^{2n}i^2+3n\sum_{i=1}^{2n}1\\
&= 3n\times\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}+3n\times 2n\\
&= n^2(8n^2+6n+7)
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
e_n &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{i+j} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} 2^i \underbrace{\qquad}_{\text{indépendant de } i} 2^j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(2^j\sum_{i=1}^{j} 2^i\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(2^j\frac{2(1-2^j)}{1-2}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(-2^{j+1}+2^{2j+1}\right) \\
&= -2\sum_{j=1}^{n}2^j + 2\sum_{j=1}^{n}4^j \\
&= -2\times 2\times\frac{1-2^n}{1-2} + 2\times 4\times\frac{1-4^n}{1-4} \\
&= -2^{n+2}+4-\frac{8}{3}+\frac{2^{2n+3}}{3} \\
&= \frac{2^{2n+3}}{3}-2^{n+2}+\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

On peut aussi écrire

$$\begin{aligned}
e_n &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{i+j} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} 2^j \underbrace{\qquad}_{\text{indépendant de } j} 2^i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(2^i\sum_{j=i}^{n} 2^j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(2^i\times 2^i\times\frac{1-2^{n-i+1}}{1-2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(2^{n+i+1}-2^{2i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}2^{n+i+1} - \sum_{i=1}^{n}4^i \\
&= 2^{n+2}\times\frac{1-2^n}{1-2} - 4\times\frac{1-4^n}{1-4} \\
&= 2^{n+2}(2^n-1)-\frac{4}{3}(4^n-1) \\
&= 2^{2n+2}-2^{n+2}-\frac{1}{3}2^{2n+2}+\frac{4}{3} \\
&= \frac{2^{2n+3}}{3}-2^{n+2}+\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
f_n &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2^{i+j} \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} 2^i \underbrace{2^j}_{\text{indépendant de } i}\right) \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(2^j\sum_{i=1}^{j-1} 2^i\right) \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(2^j\frac{2(1-2^{j-1})}{1-2}\right) \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(-2^{j+1}+2^{2j}\right) \\
&= -2\sum_{j=2}^{n}2^j+\sum_{j=2}^{n}4^j \\
&= -2\times 2^2\times\frac{1-2^{n-1}}{1-2}+4^2\times\frac{1-4^{n-1}}{1-4} \\
&= -2^{n+2}+8-\frac{16}{3}+\frac{2^{2n+2}}{3} \\
&= \frac{2^{2n+2}}{3}-2^{n+2}+\frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Vérifions la cohérence de ce résultat en observant que

$$e_n-f_n=\sum_{1\leqslant i=j\leqslant n}2^{i+j}=\sum_{i=1}^{n}4^i=4\times\frac{1-4^n}{1-4}=\frac{4}{3}(4^n-1)$$

En reprenant les expressions explicites de e_n et f_n, on obtient

$$e_n-f_n=\frac{2^{2n+3}}{3}-2^{n+2}+\frac{4}{3}-\frac{2^{2n+2}}{3}+2^{n+2}-\frac{8}{3}=\frac{2^{2n+2}}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}(4^n-1)$$

ce qui est bien cohérent !
On pouvait aussi écrire

$$\begin{aligned}
f_n &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2^{i+j} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} 2^j \underbrace{2^i}_{\text{indépendant de } j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\left(2^i\sum_{j=i+1}^{n} 2^j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\left(2^i\times 2^{i+1}\times\frac{1-2^{n-i}}{1-2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\left(2^{n+i+1}-2^{2i+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}2^{n+i+1}-2\sum_{i=1}^{n-1}4^i \\
&= 2^{n+2}\times\frac{1-2^{n-1}}{1-2}-2\times 4\times\frac{1-4^{n-1}}{1-4} \\
&= 2^{n+2}(2^{n-1}-1)-\frac{8}{3}(4^{n-1}-1) \\
&= 2^{2n+1}-2^{n+2}-\frac{1}{3}2^{2n+1}+\frac{8}{3} \\
&= \frac{2^{2n+2}}{3}-2^{n+2}+\frac{8}{3}
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} g_n &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i^3}{(j+1)^2} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{i^3}{(j+1)^2}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{(j+1)^2}\sum_{i=1}^{j} i^3\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{(j+1)^2}\times\frac{j^2(j+1)^2}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} j^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} h_n &= \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3n} 4^{\frac{i^2}{j(j+1)}} \\ &= 4^{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3n}\frac{i^2}{j(j+1)}} \\ &= 4^{\sum\limits_{j=1}^{3n}\left(\sum\limits_{i=1}^{j}\frac{i^2}{j(j+1)}\right)} \\ &= 4^{\sum\limits_{j=1}^{3n}\left(\frac{1}{j(j+1)}\sum\limits_{i=1}^{j} i^2\right)} \\ &= 4^{\sum\limits_{j=1}^{3n}\left(\frac{1}{j(j+1)}\times\frac{j(j+1)(2j+1)}{6}\right)} \\ &= 4^{\frac{1}{6}\sum\limits_{j=1}^{3n}(2j+1)} \\ &= 4^{\frac{1}{3}\sum\limits_{j=1}^{3n} j+\frac{1}{6}\sum\limits_{j=1}^{3n}1)} \\ &= 4^{\frac{1}{3}\times\frac{3n(3n+1)}{2}+\frac{3n}{6}} \\ &= 4^{\frac{n(3n+2)}{2}} \\ &= 2^{n(3n+2)} \end{aligned}$$

▷ **Corrigé de l'exercice 3.2**

▷ **Corrigé de l'exercice 3.3**

1. Remarquons en effet que

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} ij &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \underbrace{i}_{\text{indépendant de } j} \; j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i \times \underbrace{\sum_{j=1}^{n} j}_{\text{indépendant de } i}\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} j\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \quad \text{car les indices sont des variables muettes.} \qquad (1)
\end{aligned}$$

2.

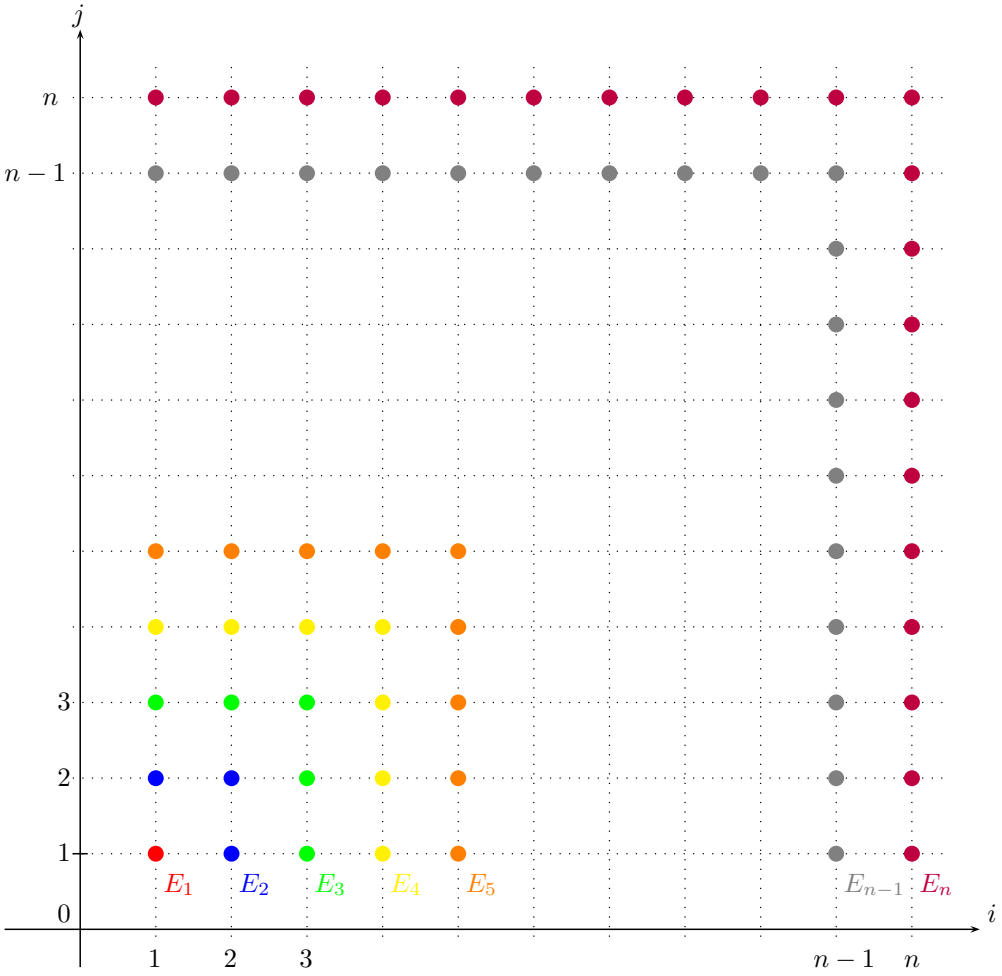

FIGURE 1 – Ensembles de sommation $E_s = \left(\bigcup_{j=1}^{s}\{(s,j)\}\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{s-1}\{(k,s)\}\right)$.

On observe alors que $\boxed{[\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!] = \coprod_{s=1}^{n} E_s}$ ($(E_s)_{s\in[\![1,n]\!]}$ réalise une partition de $[\![1,n]\!]^2$).

Pour tout $s \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in E_s} ij &= \sum_{(i,j)\in \bigcup_{j=1}^{s}\{(s,j)\}} ij + \sum_{(i,j)\in \bigcup_{k=1}^{s-1}\{(k,s)\}} ij \\
&= \sum_{j=1}^{s} sj + \sum_{k=1}^{s-1} ks \\
&= s\sum_{j=1}^{s} j + s\sum_{k=1}^{s-1} k \\
&= s\frac{s(s+1)}{2} + s\frac{(s-1)s}{2} \\
&= \frac{s^2}{2}(s+1+s-1) \\
&= s^3
\end{aligned}$$

En sommant sur les ensembles proposés :

$$\sum_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} ij = \sum_{(i,j)\in\coprod_{s=1}^{n} E_s} ij = \sum_{s=1}^{n}\sum_{(i,j)\in E_s} ij = \sum_{s=1}^{n} s^3 \tag{2}$$

Ainsi, les égalités (1) et (2) donnent $\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{s=1}^{n} s^3.}$

▹ **Corrigé de l'exercice 3.4**

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} ij &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i\times\sum_{j=1}^{n} j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} ij \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(j\times\sum_{i=1}^{j-1} i\right) \\
&= \sum_{j=2}^{n} j\frac{j(j-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}(j^3-j^2) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} j^3 - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} j^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{8} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} ij \\
&= \sum_{j=1}^{n} j\times\left(\sum_{i=1}^{j} i\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j\frac{j(j+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^3+j^2) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^3 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}
\end{aligned}$$

Un moyen simple de vérifier les deux résultats précédents consiste à observer que

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij + \sum_{1\leqslant i=j\leqslant n} ij = \frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24} + \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,,$$

ce qui est assez immédiat d'après le calcul.

4.

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i+j=n\\(i,j)\in\mathbb{N}^2}} ij &= \sum_{i=0}^{n} i(n-i) \\
&= n\sum_{i=0}^{n} i - \sum_{i=0}^{n} i^2 \\
&= n\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(n-1)}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2\\ i+j\leqslant n}} ij &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\substack{(i,j)_i\,{}^n\mathbb{N}^2\\ i+j=k}} ij\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{k(k+1)(k-1)}{6} \quad \text{en utilisant le résultat ci-dessus}\\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}(k^3-k)\\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{n(n+1)(n-1)(n+2)}{24}
\end{aligned}$$

▷ Corrigé de l'exercice 3.5

- Soit $i\in[\![1,n]\!]$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right)\\
&= \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 1\leqslant i\leqslant n}} a_{i,k}b_{k,j}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_{k,j}}_{\substack{=1\\ \text{par hyp. sur } (b_{i,j})}} \quad \text{car } a_{i,k} \text{ est indépendant de l'indice } j\\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\\
&= 1 \quad \text{par hyp. sur } (a_{i,j})
\end{aligned}$$

- Soient $A=(a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ et $B=(b_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ deux matrices carrées de tailles à coefficients complexes ayant la propriété que la sommes de tous les coefficients de chacunes de leurs n lignes vaut 1, ce qui revient à faire l'hypothèse

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}=\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}=1.$$

Ces matrices sont dites **stochastiques selon les lignes**. La matrice $C=(c_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ dont les coefficients sont définis, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ par $c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ est la matrice $A\times B$.

Nous venons donc de prouver que le produit de deux matrices stochastiques selon les lignes est une matrice stochastique selon les lignes.

▷ Corrigé de l'exercice 4.1

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé quelconque.

$$S_{n+1}-S_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k2^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k}=\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k}=\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\geqslant 0$$

Ainsi, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{k2^k}}_{\leqslant \frac{1}{2^k}} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \\ &\leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} \\ &\leqslant 1 - \frac{1}{2^n} \\ &\leqslant 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1.

Pour améliorer la majoration globable, au lieu d'utiliser les n majorations

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \ , \ \frac{1}{k2^k} \leqslant \frac{1}{2^k}$$

observons que pour $k = 1$ c'est une égalité et pour $k \geqslant 2$, on peut amélioer ces majorations en

$$\forall k \in [\![2, n]\!] \ , \ \frac{1}{k2^k} \leqslant \frac{1}{2 \times 2^k} = \frac{1}{2^{k+1}}$$

d'où

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\frac{1}{k2^k}}_{\leqslant \frac{1}{2^{k+1}}} \\ &\leqslant \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \\ &\leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} \times \frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}_{\leqslant 1} \\ &\leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ainsi, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $\dfrac{3}{4}$.

3. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc (théorème de la limite monotone) elle converge.

▷ Corrigé de l'exercice 4.2

Idée : regrouper les termes de la sommes par paires de termes consécutifs ce qui revient à faire une sommation par tranches de deux termes chacunes :

$$A_{10} = \underbrace{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}} + \frac{1}{7} - \ldots + \underbrace{\frac{1}{9} - \frac{1}{10}}$$

et

$$A_{11} = \underbrace{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}} + \frac{1}{7} - \ldots + \underbrace{\frac{1}{9} - \frac{1}{10}} + \frac{1}{11}$$

On remarque alors que le dernier terme est seul ou pas selon la parité de l'indice n.

- Supposons que $n \equiv 0[2] : \exists p \in \mathbb{N}^* : n = 2p$.

$$\begin{aligned} A_n &= A_{2p} \\ &= \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k\equiv 0[2]}}^{2p} \frac{-1}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\equiv 1[2]}}^{2p} \frac{1}{k} \\ &= -\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2i} + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2i(2i-1)} \end{aligned}$$

Or $n = 2p$ donc $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = p$ et $\frac{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} = \frac{p-p}{2p} = 0$ si bien que nous venous de prouver, pour $n \equiv 0[2]$,

$$A_n = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2i(2i-1)} + \frac{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n}.$$

- Supposons que $n \equiv 1[2] : \exists p \in \mathbb{N} : n = 2p+1$.

$$\begin{aligned} A_n &= A_{2p+1} \\ &= \sum_{k=1}^{2p+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k\equiv 0[2]}}^{2p+1} \frac{-1}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\equiv 1[2]}}^{2p+1} \frac{1}{k} \\ &= -\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2i} + \sum_{i=1}^{p+1} \frac{1}{2i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i} \right) + \frac{1}{2p+1} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2i(2i-1)} + \frac{1}{2p+1} \end{aligned}$$

Or $n = 2p+1$ donc $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = p$ et $\frac{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} = \frac{p+1-p}{2p+1} = \frac{1}{2p+1}$ si bien que nous venous de prouver, pour $n \equiv 1[2]$,

$$A_n = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2i(2i-1)} + \frac{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n}.$$

▷ Corrigé de l'exercice 4.3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
&= -\sum_{\substack{k=1\\k\equiv 0[2]}}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1\\k\equiv 1[2]}}^{n} \frac{1}{k} \\
&= -2\sum_{\substack{k=1\\k\equiv 0[2]}}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1\\k\equiv 0[2]}}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1\\k\equiv 1[2]}}^{n} \frac{1}{k} \\
&= -2\sum_{1\leqslant 2i\leqslant n}^{n} \frac{1}{2i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= -\sum_{1\leqslant 2i\leqslant n}^{n} \frac{1}{i} + B_n \\
&= -\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} \frac{1}{i} + B_n \\
&= -B_{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} + B_n
\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $n \geqslant 2$.
En utilisant le résultat donné par l'énoncé appliqué pour $n \leftarrow n$:

$$\ln(n) + C - \frac{D}{n} \leqslant B_n \leqslant \ln(n) + C + \frac{D}{n} \tag{3}$$

et lorsqu'on l'applique pour $n \leftarrow \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$:

$$\ln\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor + C - \frac{D}{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} \leqslant B_{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} \leqslant \ln\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor + C + \frac{D}{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} \tag{4}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n-1}{2} \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor \leqslant \frac{n}{2}$ donc, par croissance de la fonction logarithme,

$$\ln\frac{n-1}{2} \leqslant \ln\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor \leqslant \ln\frac{n}{2}$$

et par décroissance sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \frac{D}{x}$,

$$\frac{2D}{n} \leqslant \frac{D}{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} \leqslant \frac{2D}{n-1}$$

donc

$$\frac{D}{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} \leqslant \frac{2D}{n-1} \quad \text{et} \quad -\frac{D}{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} \geqslant -\frac{2D}{n-1}$$

si bien que l'encadrement (4) devient

$$\ln\frac{n-1}{2} + C - \frac{2D}{n-1} \leqslant B_{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} \leqslant \ln\frac{n}{2} + C + \frac{2D}{n-1} \tag{5}$$

Par conséquent,

$$-\ln\frac{n}{2} - C - \frac{2D}{n-1} \leqslant -B_{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} \leqslant \ln\frac{n-1}{2} - C + \frac{2D}{n-1} \tag{6}$$

En additionnant membre à membre les encadrements (3) et (6),

$$\ln(n) + C - \frac{D}{n} - \ln\frac{n}{2} - C - \frac{2D}{n-1} \leqslant B_n - B_{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} \leqslant \ln(n) + C + \frac{D}{n} - \ln\frac{n-1}{2} - C + \frac{2D}{n-1}$$

d'où

$$\ln 2 - \frac{(3n-1)D}{n(n-1)} \leqslant A_n \leqslant \ln\frac{2n}{n-1} + \frac{(3n-1)D}{n(n-1)}$$

3. Les deux suites $\left(\ln(2) - \frac{(3n-1)D}{n(n-1)}\right)_{n\geqslant 2}$ et $\left(\ln\frac{2n}{n-1} + \frac{(3n-1)D}{n(n-1)}\right)_{n\geqslant 2}$ convergent vers une même limite (qui est égale $\ln 2$) si bien que le théorème d'existence de limite par encadrement permet d'affirmer

(i) la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge,
(ii) sa limite est $\ln 2$.

▷ Corrigé de l'exercice 4.4

1. Considérons une suite complexe $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et la suite de fonctions polynomiales associées : $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

   La fonction f_n est polynomiale donc dérivable et

   $$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ f_n'(x)=\sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1}$$

   si bien que

   $$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ x f_n'(x)=\sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k}\ .$$

2. La fonction f_n est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$ ce qui permet d'intégrer entre 0 et x :

   $$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \int_0^x f_n(u)\mathrm{u}=\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{n} a_k u^k\right)\mathrm{u}=\sum_{k=0}^{n} a_k\int_0^x u^k\mathrm{u}=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k x^{k+1}}{k+1}$$

3. Application au calcul des sommes suivantes :
   - Appliquons la formule de la question 1 pour $a_k=2^k$ et $x=1$:

     $$\sum_{k=1}^{n} k2^k=1\times f_n'(1)=f_n'(1)\ .$$

     Par ailleurs, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}2^k x^k=\sum_{k=0}^{n}(2x)^k=\frac{1-(2x)^{n+1}}{1-2x}$ donc $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$,

     $$f_n'(x)=\frac{-2^{n+1}(n+1)x^n(1-2x)+2(1-(2x)^{n+1})}{(1-2x)^2}$$

     Par conséquent,

     $$\sum_{k=1}^{n} k2^k=\frac{-2^{n+1}(n+1)1^n(1-2)+2(1-(2)^{n+1})}{(1-2)^2}=2(2^n(n-1)+1)$$

   - Appliquons la formule de la question 2 pour $a_k=1$ et $x=\frac{1}{2}$ et en remplaçant n par $n-1$:

     $$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}=\int_0^{\frac{1}{2}} f_{n-1}(u)\mathrm{u}\ .$$

     Par ailleurs, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $f_{n-1}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x^k=\frac{1-x^n}{1-x}$ si bien que

     $$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-u^n}{1-u}\mathrm{u}\ .$$

     En effectuant la changement d'indice $j=k+1$, $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j2^j}$ donc

     $$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j2^j}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-u^n}{1-u}\mathrm{u}\ .$$

   - Appliquons la technique de la question 2 pour $a_k=1$, $x\in[0,1[$ et en remplaçant n par n :

     $$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{(k+1)}=\int_0^x f_n(u)\mathrm{u}$$

     or

     $$\forall u\in[0,1[\ ,\ f_n(u)=\frac{1-u^{n+1}}{1-u}$$

donc

$$x+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k+1}}{(k+1)}=\int_0^x\frac{1-u^{n+1}}{1-u}\dot{u}$$

soit, puisque $x=\int_0^x \dot{u}$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k+1}}{(k+1)}=\int_0^x\frac{u(1-u^n)}{1-u}\dot{u}$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k+1)}=\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{u(1-u^n)}{1-u}\dot{u}$$

d'où, en intégrant entre 0 et $\frac{1}{2}$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k+1)}\right)\dot{x}=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{u(1-u^n)}{1-u}\dot{u}\right)\dot{x}$$

Après calcul et simplification du membre de gauche,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1).2^k}=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{u(1-u^n)}{1-u}.\dot{u}\right)\dot{x}.$$